NOM-Prénom : . . . .   Groupe : . . . . . .

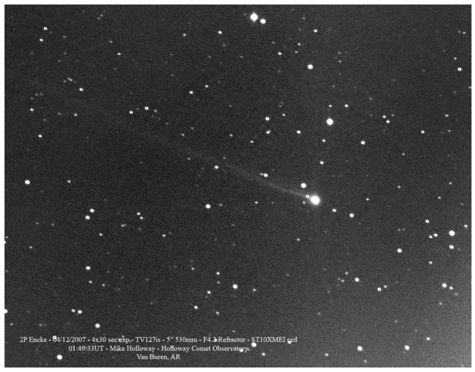
1A CC1 Mécanique du point (1h)

Lundi 16 octobre 2023

- Aucun document n'est admis. Une calculatrice est autorisée.
- Pensez à expliquer votre raisonnement et vos calculs et à simplifier au maximum vos résultats.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :
  MP1 : Connaître les concepts généraux de la mécanique du point
  MP2 : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

Comète 2P/Encke

La comète de Encke (désignation officielle 2P/Encke) est une comète périodique qui fut découverte le 17 janvier 1786 par l'astronome français P. Méchain depuis Paris. Elle est nommée en l'honneur de l'astronome allemand J. F. Encke qui détermina sa périodicité. Comme l'indique sa désignation officielle, la comète de Encke est la seconde comète périodique découverte après la comète de Halley (1P/Halley).



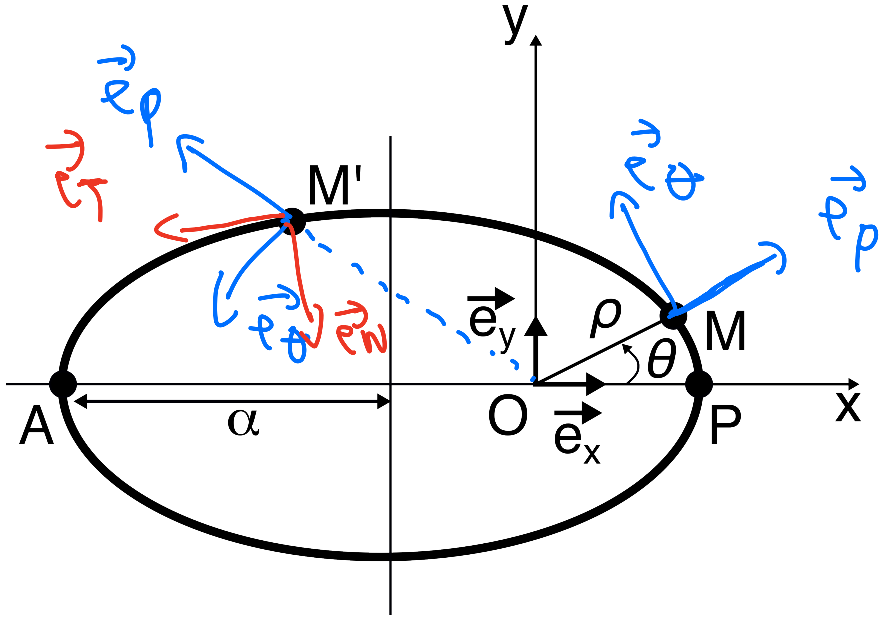
Un bon modèle de sa trajectoire, dans le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, est de considérer qu'elle adopte une trajectoire elliptique avec la position du Soleil correspondant à l'un des deux foyers de l'ellipse, noté O sur le schéma ci-dessous. En coordonnées cylindriques, cette trajectoire est donnée par l'équation suivante :

$$\rho = \frac{\gamma}{1 + e\cos(\theta)} \qquad \text{(Équation 1)}$$

où γ est une constante positive et $0 < e < 1$, respectivement appelés le paramètre et l'excentricité de l'ellipse. On peut montrer par ailleurs, que la conservation du moment cinétique implique l'équation suivante qu'on admettra et utilisera par la suite

$$\rho^2\dot{\theta} = \gamma u, \qquad \text{(Équation 2)}$$

avec u une constante positive. On considèrera que cette trajectoire sera parcourue dans le sens trigonométrique, c'est à dire $\dot{\theta} > 0$.



1. Quelle est la dimension de γ ? En déduire la dimension de u. (**1 pt**)

γ homogène à 1 longueur (cf. Eq 1) 0,5 , u homogène à 1 vitesse 0,5

2. Représenter sur le schéma les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ aux points M et en M'. (**1 pt**) 0,5 pour chaque.

3. Donner l'expression du vecteur position du point M dans le repère d'espace cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, en fonction de γ, e et θ. (**1 pt**)

$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho \;/0{,}5 \;= \frac{\gamma}{1+e\cos\theta}\vec{e}_\rho \;0{,}5$$

4. Démontrer que le vecteur vitesse du point M dans le repère d'espace cylindrique s'écrit : $\vec{v}_M = \left| \begin{array}{l} e\,u\,\sin(\theta) \\ u\,(1+e\cos(\theta)) \end{array} \right.$. (**2 pts**)

$\vec{OM} \left| \begin{array}{l} \dot\rho \\ \rho\dot\theta \end{array} \right.$ 0,5

$$* \; \rho\dot\theta = \frac{\rho^2\dot\theta}{\rho} = u(1+e\cos\theta) \;0{,}5$$

$$* \; \dot\rho = \frac{\gamma e\dot\theta\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = e\sin\theta \times \dot\theta \frac{1}{\gamma}\frac{\gamma^2}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\dot\rho = e\sin\theta \times \frac{\rho^2\dot\theta}{\gamma} = eu\sin\theta \;/1$$

5. Calculer la norme du vecteur $\vec{v}_M$, notée $||\vec{v}_M||$ en fonction de u, e et θ. (**1 pt**)

$$||\vec{v}_M|| = \sqrt{(eu\sin\theta)^2 + u^2(1+e\cos\theta)^2} \;0{,}5$$

$$= u\sqrt{e^2\sin^2\theta + 1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta}$$

$$= u\sqrt{1+2e\cos\theta + e^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = u\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta} \;0{,}5$$

6. Sans passer par un calcul de dérivées, pour quelle valeur de θ entre $[0; 2\pi[$ cette vitesse est maximale ? À quel point de la trajectoire cela correspond-t-il ? En quel point la vitesse est-elle minimale ? (**1,5 pt**)

$||\vec{v}_M||$ max : avec $\cos\theta = +1$ 0,5 $\Rightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow$ point P 0,5

$||\vec{v}_M||$ min : avec $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi \Leftrightarrow$ point A 0,5

7. Montrer que l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_M$ dans le repère d'espace cylindrique est $\vec{a}_M = -u\dot{\theta}\vec{e}_\rho$. Commentez cette expression. (**2 pts**)

$$\vec{a}_n = \frac{d}{dt}(eu\sin\theta)\vec{e}_\rho + eu\sin\theta\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d}{dt}\left(u(1+e\cos\theta)\right)\vec{e}_\theta + u(1+e\cos\theta)\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

0,5 $\vec{a}_n \left| \begin{array}{l} eu\dot{\theta}\cos\theta - u(1+e\cos\theta)\dot{\theta} \\ eu\dot{\theta}\sin\theta - eu\dot{\theta}\sin\theta \end{array} \right.$ 0,5

$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho$ 0,5

accélération radiale seulement 0,5

8. A l'aide de l'Équation 2, écrire l'expression $||\vec{a}_M||$ en fonction de $u,\ e,\ \gamma$ et θ. (**1,5 pt**)

$\dot{\theta} = \frac{\gamma u}{p^2} = \frac{u}{\gamma}(1+e\cos\theta)^2$ 0,5 $\quad ||\vec{a}_n|| = \frac{u^2}{\gamma}(1+e\cos\theta)^2$ 1

$$||\vec{a}_n|| = \frac{u^2}{\gamma}\left(1+2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta\right)$$

9. Sans passer par un calcul de dérivées, pour quelle valeur de θ entre $[0; 2\pi[$ cette accélération est maximale ? À quel point de la trajectoire cela correspond-t-il ? En quel point l'accélération est-elle minimale ? (**1,5 pt**)

$||\vec{a}_n|| = \frac{\gamma u^2}{p^2}$ $\quad ||\vec{a}_n||$max quand p est min $\theta = 0$ P 1

$||\vec{a}_n||$min —— p est max $\theta = \pi$ A 0,5

10. La troisième loi de Kepler donne la relation entre la période de révolution T et α le demi-grand axe de l'ellipse : $\frac{\alpha^3}{T^2} \approx \frac{G(M_S)}{4\pi^2}$, où $G = 6{,}67\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ est la constante de gravitation, et $M_S = 1{,}99\ 10^{30}$ kg la masse du Soleil. Dans le cas de 2P/Encke, $e = 0{,}85$ et $T = 3{,}3$ ans.
Sachant que le périhélie, c'est à dire la distance OP est donnée par $\alpha(1-e)$, calculer sa valeur numérique en u.a (distance Terre-Soleil). Rappel : 1 u.a = $1{,}50\ 10^{11}$m. (**1,5 pt**)

$$\alpha^3 = \frac{GM_S}{4\pi^2}T^2 = \frac{6{,}67\,10^{-11} \times 1{,}99\times10^{30}}{4\pi^2} \times (3{,}3\times365\times24\times3600)^2$$ 0,5

$\alpha = 3{,}31\ 10^{11}$ m $\rightarrow$ $OP = 4{,}97\ 10^{10}$ m 0,5 $\Rightarrow 0{,}331$ u.a 0,5

11. Représenter sur le schéma les vecteurs $\vec{e}_T$ et $\vec{e}_N$ du repère de Frenet au point M'. (**1 pt**)

0,5 pour chaque.

12. Déterminer les coordonnées de $\vec{e}_T$ dans la base $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$. (**1,5 pt**)

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{e\cancel{u}\sin\theta}{\cancel{u}\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}}\,\vec{e}_\rho + \frac{\cancel{u}(1+e\cos\theta)}{\cancel{u}\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}}\,\vec{e}_\theta$$

0,5 1

13. Déterminer les coordonnées de $\vec{e}_N$ dans la base $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$. (**1,5 pt**)

$$\vec{e}_N = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_T = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} e\sin\theta/\sqrt{\ldots} \\ (1+e\cos\theta)/\sqrt{\ldots} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{(1+e\cos\theta)}{\sqrt{\ldots}} \\ \frac{e\sin\theta}{\sqrt{\ldots}} \\ 0 \end{vmatrix}$$

0,5 1

14. Calculer l'expression de la composante tangentielle de l'accélération a_T en fonction de e, u, γ et θ par la méthode de votre choix. (**2 pts**)

$$a_T = \frac{d\|\vec{v}_n\|}{dt} = \frac{d}{dt}\left(u\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}\right) = -\frac{u \times \cancel{2}e\dot{\theta}\sin\theta}{\cancel{2}\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}}$$

0,5

ou bien $\vec{a}_n \cdot \vec{e}_T = \ldots$ 0,5

1,5 pour $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{u}{\gamma}(1+e\cos\theta)^2$$

calcul juste

$$\boxed{a_T = -\frac{u^2 e\sin\theta(1+e\cos\theta)^2}{\gamma(1+e^2+2e\cos\theta)^{1/2}}}$$

15. Calculer l'expression de la composante normale de l'accélération a_N en fonction de e, u, γ et θ par la méthode de votre choix. (**1,5 pt**)

$$a_N = \vec{a}_n \cdot \vec{e}_N = \frac{-(1+e\cos\theta)}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}} \times \frac{-u^2}{\gamma}(1+e\cos\theta)^2$$

0,5

$$a_N = \frac{u^2(1+e\cos\theta)^3}{\gamma\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}$$

1

ou bien $a_n^2 - a_T^2$ 0,5

moins sympa !

16. En déduire l'expression du rayon de courbure R de la trajectoire en fonction de γ, e et θ. (**1,5 pt**)

$$R = \frac{\|\vec{v}\|^2}{a_N} = \frac{\gamma\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}\,\cancel{u^2}(1+e^2+2e\cos\theta)}{\cancel{u^2}(1+e\cos\theta)^3} = \frac{\gamma(1+e^2+2e\cos\theta)^{3/2}}{(1+e\cos\theta)^3}$$

0,5 1