NOM-Prénom : . . . . Groupe : . . . . . .

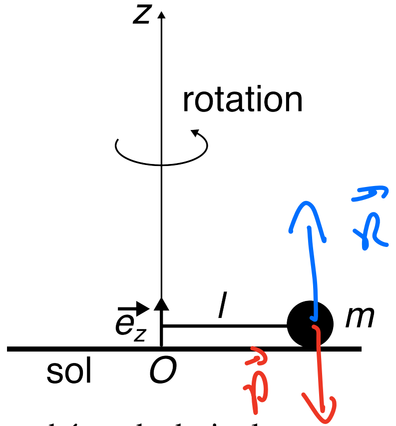
1A CC2 Mécanique du point (1h)

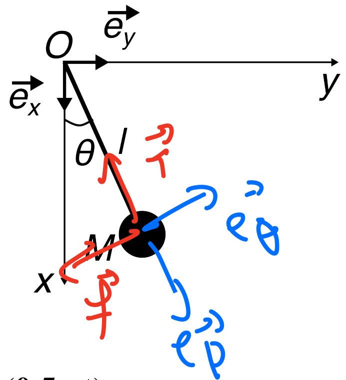
Lundi 27 novembre 2023

- Aucun document n'est admis. Une calculatrice est autorisée.
- Pensez à expliquer votre raisonnement et vos calculs et à simplifier au maximum vos résultats.

Mouvement de rotation circulaire freiné

Une masse m assimilée à un point matériel M est fixée à une tige rigide de longueur l qui tourne sur le sol autour de l'axe $(0z)$. La masse glisse sans frottement sur le sol (plan xOy). La masse subit une force de frottements visqueux dont l'expression est $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où $\alpha > 0$. Le mouvement sera étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol supposé galiléen. La masse est initialement à la position $\theta = 0$. Elle est lancée dans le sens direct, avec une norme de vitesse initiale égale à v_0.





1. Représenter sur le schéma de droite les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$. (**0.5 pt**)
2. Donner les expressions du vecteur position, du vecteur vitesse $\vec{v}_M$ et du vecteur accélération $\vec{a}_M$ du point M dans le repère d'espace cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. (**1 pt**)

$$\vec{OM}\begin{vmatrix}\rho\\0\\0\end{vmatrix} \quad \vec{v}_M\begin{vmatrix}0\\\rho\dot\theta\\0\end{vmatrix} \quad \vec{a}_M\begin{vmatrix}-\rho\dot\theta^2\\\rho\ddot\theta\\0\end{vmatrix}$$

0,5 0,5

3. Calculer le moment cinétique de la masse m par rapport au point O. Il sera noté $\vec{L}_O$. (**1.5 pt**)

$$\vec{L}_O = \underbrace{\vec{OM}\wedge m\vec{v}_M}_{0,5} = \begin{vmatrix}\rho\\0\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\\rho\dot\theta\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\\underline{m\rho^2\dot\theta}\end{vmatrix}$$

1

4. Représenter, judicieusement soit dans le schéma de droite ou de gauche, chacune des forces agissant sur la masse m c'est à dire : le poids $\vec{P}$, la tension de la tige $\vec{T}$, la réaction du sol $\vec{R}$ et la force de frottement $\vec{f}$. (**1 pt**) 1/4 de point pour chaque.

5. Donner les expressions de toutes les forces agissant sur la masse m dans le repère d'espace cylindrique ($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$). (**1.5 pt**)

$\vec{P}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix}$ $\quad \vec{n}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{vmatrix}$ $\quad \vec{T}\begin{vmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{f}\begin{vmatrix} 0 \\ -\alpha\rho\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$

0,25 $\quad$ 0,25 $\quad$ 0,5 $\quad$ 0,5

6. Calculer les moments de ces forces par rapport au point O. (**2 pts**)

$\vec{\mathcal{M}}^{\vec{P}}_{/O} = \begin{vmatrix} 0 \\ mg\rho \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{\mathcal{M}}^{\vec{n}}_{/O} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\rho n \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{\mathcal{M}}^{\vec{T}}_{/O} = \vec{0}$ $\quad \vec{\mathcal{M}}^{\vec{f}}_{/O} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha\rho^2\dot{\theta} \end{vmatrix}$

0,5 par moment

7. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer qu'on obtient l'équation différentielle suivante : $\ddot{\theta} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{\theta} = 0$. (**1 pt**)

0,5

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = m\rho^2\ddot{\theta}\,\vec{e}_z \Rightarrow m\rho^2\ddot{\theta} = -\alpha\rho^2\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} = 0$$

0,5

8. Résoudre cette équation différentielle du premier ordre pour déterminer l'expression de $\dot{\theta}(t)$. (**1.5 pts**)

$$\dot\theta(t) = C e^{-\frac{\alpha}{m}t} \qquad \dot\theta(0) = \frac{v_0}{\ell}$$

0,5

$$\dot\theta(t) = \frac{v_0}{\ell} e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

1

9. En déduire l'expression de $\theta(t)$. (**1 pt**)

$$\theta(t) = -\frac{m}{\alpha}\frac{v_0}{\ell} e^{-\frac{\alpha}{m}t} + C' \qquad \theta(0) = 0$$

$$C' = \frac{m v_0}{\alpha \ell}$$

$$\theta(t) = \frac{m v_0}{\alpha \ell}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)$$

10. Déterminer le nombre de tours effectués par la masse en fonction de m, v_0, α et l avant son arrêt complet. (**1 pt**)

$$\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \frac{m v_0}{\alpha \ell} \qquad N = \frac{m v_0}{\alpha \ell 2\pi}$$

0,5 1

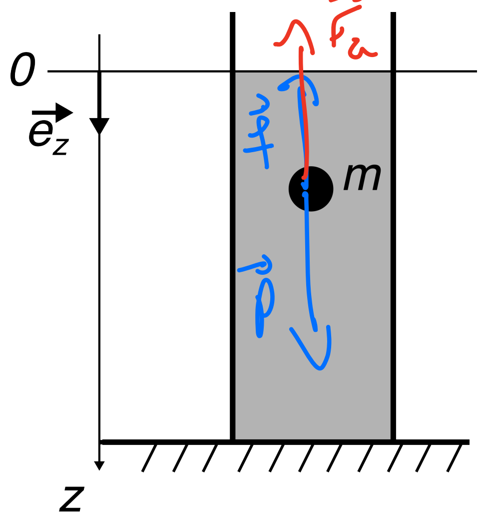
Viscosimètre à chute de bille

Un viscosimètre à chute de bille est un dispositif très simple à mettre en place. Il s'agit d'une éprouvette, remplie du fluide à étudier, ici du glycérol, dans laquelle chutent des billes d'acier sphériques de masse m et de rayon R connu. Si le rayon de la bille est suffisamment petit par rapport au diamètre de l'éprouvette, la force de frottement exercée par le glycérol sur la bille est bien décrite par la loi (empirique) de Stokes :

$$\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v},$$

où η est la viscosité dynamique du glycérol que l'on cherche à mesurer et $\vec{v}$, le vecteur vitesse de la bille d'acier. On notera ρ_{ac} la masse volumique de l'acier et ρ_{gl} celle du glycérol. On rappelle que la poussée d'Archimède, qui est la résultante des forces de pression exercées par un fluide sur une sphère, est l'opposée du poids de fluide déplacé par la sphère, soit en norme $F_a = \rho_{gl}\frac{4\pi}{3}R^3 g$. On ne s'intéresse qu'au mouvement de la bille dans le glycerol.

1. Compléter le schéma suivant en y plaçant les forces subies par la bille d'acier. (**1 pt**)



0,25 Poids

0,25 frottement

0,5 : Poussée

2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la composante de la vitesse vers le bas de la bille notée v est de la forme $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Av = B$, avec A et B des constantes fonction de $g, m, R, \eta, \rho_{gl}, \rho_{ac}$ à déterminer. (**3 pts**)

$$m\dot{v} = mg - F_a - 6\pi\eta R v \quad (1)$$

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho_{ac}$$

$$\dot{v} + \frac{6\pi\eta R}{m} v = g - \frac{\rho_{gl}\frac{4\pi}{3}R^3 g}{m}$$

$$\dot{v} + \frac{3\cancel{6}\cancel{\pi}\eta R}{2\frac{\cancel{4}\cancel{\pi}}{3}R^3\rho_{ac}} v = g - \frac{\rho_{gl}}{\rho_{ac}} \times g \quad (1)$$

$$\dot{v} + \underbrace{\frac{9\eta}{2\rho_{ac}R^2}}_{A\ (0,5)} v = \underbrace{g\left(1 - \frac{\rho_{gl}}{\rho_{ac}}\right)}_{B\ (0,5)}$$

3. Exprimer la vitesse limite v_∞ atteinte par la bille en régime stationnaire, en fonction de A et B. (**1 pt**)

régime stationnaire $\frac{dv}{dt} = 0$ (0,5)

$$v_\infty = \frac{B}{A} \quad (0,5)$$

$$v_\infty = \frac{g\left(1 - \frac{\rho_{gl}}{\rho_{ac}}\right)}{9\eta / 2\rho_{ac}R^2}$$

4. Dans ce régime, on mesure la durée Δt nécessaire pour que la bille parcoure une distance L donnée. Déterminer la relation entre $\Delta t, L, A, B$. (**1 pt**)

$$v_\infty = \frac{L}{\Delta t} \qquad \Delta t = \frac{L}{v_\infty} = \frac{LA}{B} \quad (1)$$

5. En prenant une éprouvette de 1m de hauteur remplie de glycérol, il a été mesuré en moyenne un Δt = 0,260 s pour un parcours L=10 cm de la bille d'acier (R=5 mm). Cette moyenne a été réalisée sur la moitié inférieure du parcours de la bille. Calculer la viscosité η du glycérol, la comparer à celle de l'eau qui est à 20°C de l'ordre de 10^{-3} Poiseuille. (1Pl = 1 kg.m^{-1}.s^{-1}) Données numériques : ρ_{ac} = 7880 kg.m^{-3}, ρ_{gl} = 912 kg.m^{-3}, g = 9,81 m.s^{-2}. (**1 pt**)

$$v_\infty = \frac{2\rho_{ac}R^2}{9\eta} \times g\left(1 - \frac{\rho_{gl}}{\rho_{ac}}\right) = \frac{L}{\Delta t}$$

$$\eta = \frac{2}{9} g \times R^2 \times \frac{\Delta t}{L} \times (\rho_{ac} - \rho_{gl}) \rightarrow \eta = 0,987 \quad (1)$$

6. Expliquer pourquoi, lors de l'expérience, il est nécessaire de ne faire la mesure de vitesse que dans la moitié inférieure de l'éprouvette. (**1 pt**)

il faut laisser le temps à la bille d'atteindre le régime stationnaire.

(1)