NOM-Prénom : . . . . Groupe : . . . . . .

1A CC3 Mécanique du point (2h)

Mardi 16 janvier 2024

- Aucun document n'est admis. Une calculatrice est autorisée.
- Pensez à expliquer votre raisonnement et vos calculs et à simplifier au maximum vos résultats.

Saut à l'élastique / 9.5 pts

Une personne de masse m, considérée comme un point matériel M, veut réaliser un saut à l'élastique du haut d'un pont. M tombera sans vitesse initiale du haut du pont en O avec une corde élastique, de longueur au repos l_0, accrochée à ses pieds. Entre les points O et A, la corde élastique n'est pas encore tendue et M est en chute libre. A partir du point A, la corde élastique peut être considérée comme un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que le sauteur assimilé à un point matériel reste sur une même verticale, matérialisée par un axe (Oz) orienté vers le bas. Sa position est donc repérée par $\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$. Il termine son mouvement descendant en B tel que $\overline{OB} = h$. On négligera les frottements de l'air.

1. Faire un schéma complet de la situation physique, en prenant soin de bien repérer les points O, A et B ainsi que les différentes hauteurs l_0 et h. (**0.5 pt**)

2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ durant la chute libre, c'est à dire entre les points O et A. (**0.5 pt**)

3. A l'aide des conditions initiales, écrire la solution $z(t)$ pour $z < l_0$. (**0.5 pt**)

4. Détailler le raisonnement qui permet de montrer que l'expression de l'énergie potentielle du point M, prise nulle au point O, entre les points O et A est $E_p(z) = -mgz$. (**0.5 pt**)

5. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer l'expression de la vitesse v_A atteinte par M au point A, en fonction de g et l_0. (**0.5 pt**)

6. Retrouver l'expression de v_A grâce au résultat de la question 3. (**0.5 pt**)

7. Application numérique, calculer v_A en en km/h pour $l_0 = 30$ m et $g = 9{,}81$ m.s^{-2}. (**0.5 pt**)

8. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ entre les points A et B. (**0.5 pt**)

9. Ecrire la solution générale $z(t)$ pour $z > l_0$. (**1 pt**)

10. En prenant, comme nouvelle origine des temps, le passage du point M en A, avec une vitesse v_A, déterminer les constantes d'intégration introduites à la question précédente en fonction de $m,\ g,\ k,\ l_0$. (**1 pt**)

11. Calculer le travail du poids et de la force de rappel élastique entre les points A et B, en fonction de $m,\ g,\ k,\ l_0,\ h$. (**1 pt**)

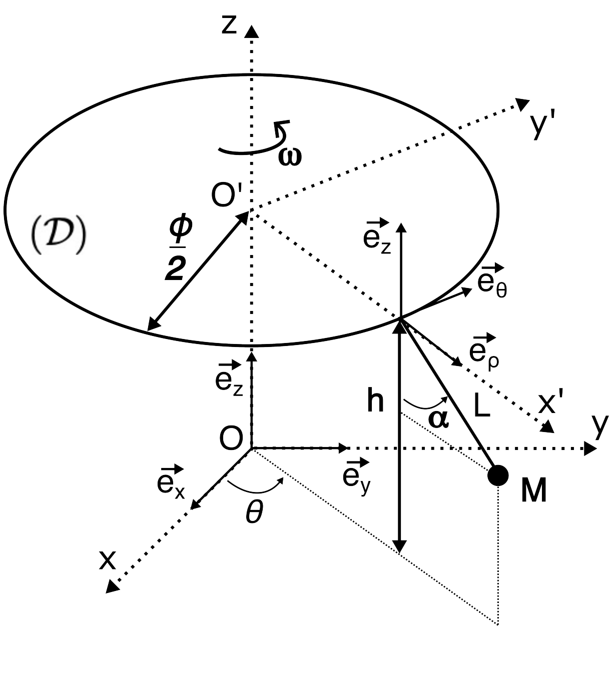
12. A l'aide du théorème de l'énergie cinétique appliqué entre les points A et B, montrer que la hauteur totale de la chute h est solution d'un polynôme du second degré avec des coefficients dépendant de $m,\ g,\ k,\ l_0$. (**1 pt**)

13. La personne, dont la masse est de 70 kg, souhaite sauter d'un pont ayant une altitude de 60 m, avec 30 m de chute libre. Elle dispose, pour réaliser son saut, de deux cordes ayant des constantes de raideur $k_1 = 100$ N/m et $k_2 = 80$ N/m. Calculer explicitement la hauteur de chute pour chacune des cordes afin de déterminer laquelle des deux cordes doit être choisie. (**1.5 pts**)

Les chaises volantes / 10.5 pts

On se propose d'étudier dans cet exercice le mouvement des chaises volantes d'un manège. Le manège est modélisé par un disque rigide $\mathcal{D}$ de diamètre ϕ restant horizontal à une hauteur h du sol et tournant à vitesse constante ω autour d'un axe vertical fixe. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ matérialisé par (O, x, y, z) est considéré galiléen, le référentiel $\mathcal{R}'$ du disque est matérialisé par (O', x', y', z). La chaise et l'amateur ou l'amatrice de sensation qui y est assis sont assimilés à un seul point matériel M de masse m. On considère pour simplifier que ce point est à l'extrémité d'un dispositif rigide rectiligne fixée au disque qui l'astreint à demeurer dans le plan $(x'O'z)$ comme indiqué sur le schéma. Le mouvement de M est donc repéré par l'angle $\alpha(t)$ que le dispositif rigide fait avec la verticale.On s'intéresse au mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ que l'on décrira à l'aide de la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$. On ne détaille pas le dispositif, de sorte qu'on considérera dans un premier temps qu'il exerce sur M une force $(\vec{T})$ ayant des composantes non nulles inconnues dans chacune des directions de la base notées (T_ρ, T_θ, T_z). On négligera les frottements de l'air. On notera L la longueur du dispositif de maintien. On rappelle les définitions des accélérations d'entraînement et de Coriolis :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right),\ \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}.$$



On considère dans un premier temps que α est constant.

1. Justifier que $\overrightarrow{O'M} = (\frac{\phi}{2} + L\sin(\alpha))\vec{e}_\rho - L\cos(\alpha)\vec{e}_z$. **(0.5 pt)**

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$. (**1 pt**)

3. Ecrire les coordonnées du vecteur rotation $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$. (**0.5 pt**)

4. Calculer l'accélération d'entraînement du point M, dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$, en justifiant pourquoi certains termes sont nuls. (**1.5 pts**)

5. Calculer l'accélération de Coriolis du point M, dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$. (**0.5 pt**)

6. Donner les expressions de chacune des forces subies par le point M dans le référentiel $\mathcal{R}'$, y compris les pseudo-forces d'inertie, dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$. (**1 pt**)

7. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, que peut-on dire de la composante T_θ de la force $\vec{T}$? (**1 pt**)

8. En admettant qu'on bloque le système dans un état tel que la force $\vec{T}$ est colinéaire au dispositif d'accroche. Représenter alors chacune des forces subies par le point M dans le référentiel $\mathcal{R}'$, y compris les pseudo-forces d'inertie, sur le schéma précédent. (**0.5 pt**)

9. Exprimer alors $\tan(\alpha) = \dfrac{-T_\rho}{T_z}$. (**0.5 pt**)

10. Toujours dans cette situation, pour $\phi = 8$ m, $L = 4$ m et $\alpha = 60°$, quelle est la valeur de la vitesse angulaire du manège en tour/min ? (**1 pt**)

11. En considérant maintenant que α dépend du temps, exprimer de nouveau $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$? (**1 pt**)

12. Quelle(s) force(s) supplémentaire(s) apparaisse(nt) dans le bilan des forces dans le référentiel $\mathcal{R}'$? Donner leur expression. Que devient la composante T_θ dans ce cas ? (**1.5 pts**)