INSA TOULOUSE

NOM-Prénom : . . . . Groupe : . . . . . .

1A CC3 Mécanique du point (2h)

Mardi 16 janvier 2024

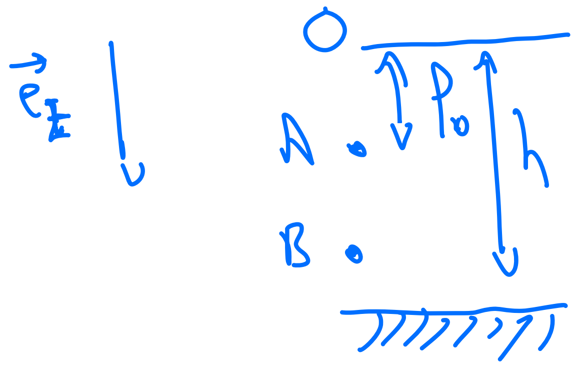
- Aucun document n'est admis. Une calculatrice est autorisée.
- Pensez à expliquer votre raisonnement et vos calculs et à simplifier au maximum vos résultats.

Saut à l'élastique / 9.5 pts

Une personne de masse m, considérée comme un point matériel M, veut réaliser un saut à l'élastique du haut d'un pont. M tombera sans vitesse initiale du haut du pont en O avec une corde élastique, de longueur au repos l_0, accrochée à ses pieds. Entre les points O et A, la corde élastique n'est pas encore tendue et M est en chute libre. A partir du point A, la corde élastique peut être considérée comme un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que le sauteur assimilé à un point matériel reste sur une même verticale, matérialisée par un axe (Oz) orienté vers le bas. Sa position est donc repérée par $\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$. Il termine son mouvement descendant en B tel que $\overline{OB} = h$. On négligera les frottements de l'air.

1. Faire un schéma complet de la situation physique, en prenant soin de bien repérer les points O, A et B ainsi que les différentes hauteurs l_0 et h. (**0.5 pt**)

0,5



2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ durant la chute libre, c'est à dire entre les points O et A. (**0.5 pt**)

0,5

$m\ddot{z} = mg$

3. A l'aide des conditions initiales, écrire la solution $z(t)$ pour $z < l_0$. (**0.5 pt**)

$\ddot{z} = g \Rightarrow \dot{z} = gt + \alpha \Rightarrow z = \frac{1}{2}gt^2 + \alpha t + \beta$

$\begin{cases} z(0) = 0 \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{2}gt^2$ 0,5

4. Détailler le raisonnement qui permet de montrer que l'expression de l'énergie potentielle du point M, prise nulle au point O, entre les points O et A est $E_p(z) = -mgz$. (**0.5 pt**)

$\delta W = -dE_p$? $\delta W = \vec{P} \cdot d\vec{P} = mg\,dz = -dE_p$

0,5

$\frac{dE_p}{dz} = -mg$ $E_p = -mgz + C^{te}$

$E_p(0) = 0 \Rightarrow E_p(z) = -mgz$

5. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer l'expression de la vitesse v_A atteinte par M au point A, en fonction de g et l_0. (**0.5 pt**)

$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$ car force conservative seulement.

$E_c(A) - \cancel{E_c(O)} + E_p(A) - \cancel{E_p(O)} = 0 \quad \frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 = -(-mg z_A) = \cancel{m}g l_0$

(0,5) $v_A = \sqrt{2 g l_0}$

6. Retrouver l'expression de v_A grâce au résultat de la question 3. (**0.5 pt**)

$z_A = \frac{1}{2} g t_A^2 \Rightarrow t_A = \sqrt{\frac{2 l_0}{g}} \qquad v_A = g \times t_A = \sqrt{2 g l_0}$ (0,5)

7. Application numérique, calculer v_A en en km/h pour $l_0 = 30$ m et $g = 9{,}81$ m.s^{-2}. (**0.5 pt**)

$v_A = 24{,}3$ m/s $\Rightarrow v_A \simeq 87$ km/h (0,5)

8. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ entre les points A et B. (**0.5 pt**)

$\cancel{m} \ddot{z} = \cancel{m} g - \frac{k}{m}(z - l_0)$

$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = g + \frac{k}{m} l_0$ (0,5)

9. Ecrire la solution générale $z(t)$ pour $z > l_0$. (**1 pt**)

Eq diff du 2nd ordre à coeff constants avec 2nd mbre

* sol Eq homogène : Eq. caract. $r^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \Delta = -4\frac{k}{m} < 0$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \Rightarrow z_0(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$ (0,75)

* sol. part : $z_p = \text{cste} \quad z_p = \frac{mg}{k} + l_0$ (0,25)

$z(t) = z_0(t) + z_p$

10. En prenant, comme nouvelle origine des temps, le passage du point M en A, avec une vitesse v_A, déterminer les constantes d'intégration introduites à la question précédente en fonction de $m,\ g,\ k,\ l_0$. (**1 pt**)

$$\text{à } t=0 \quad \begin{cases} z(0) = l_0 \\ \dot{z}(0) = v_A \end{cases} \qquad \dot{z}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$z(0) = C_1 + \frac{mg}{k} + l_0 = l_0 \qquad C_1 = -\frac{mg}{k} \quad (0{,}5)$$

$$\dot{z}(0) = C_2 \omega_0 = v_A \qquad C_2 = \frac{v_A}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2mg\,l_0}{k}} \quad (0{,}5)$$

11. Calculer le travail du poids et de la force de rappel élastique entre les points A et B, en fonction de $m,\ g,\ k,\ l_0,\ h$. (**1 pt**)

$$W^{\vec{P}}_{A\to B} = \int_A^B \vec{P}\cdot\vec{dl} = \int_{z_A}^{z_B} mg\,dz = \left[mgz\right]_{l_0}^{h} = mg(h-l_0) \quad (0{,}5)$$

$$W^{\vec{F}}_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_{z_A}^{z_B} -k(z-l_0)\,dz = -\left[\frac{k}{2}(z-l_0)^2\right]_{l_0}^{h} = -\frac{k}{2}(h-l_0)^2 \quad (0{,}5)$$

12. A l'aide du théorème de l'énergie cinétique appliqué entre les points A et B, montrer que la hauteur totale de la chute h est solution d'un polynôme du second degré avec des coefficients dépendant de $m,\ g,\ k,\ l_0$. (**1 pt**)

$$\Delta E_c = W^{\vec{P}}_{A\to B} + W^{\vec{F}}_{A\to B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -\frac{1}{2}mv_A^2 \quad (0{,}5)$$

$$-\frac{1}{2}mv_A^2 = mg(h-l_0) - \frac{k}{2}(h^2 - 2hl_0 + l_0^2)$$

$$-\frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}gl_0 + mgl_0 = -\frac{\cancel{k}}{2}h^2 + \cancel{k}l_0 h - \frac{\cancel{k}}{2}l_0^2 + \frac{mg}{k}h$$

$$0 = -h^2 + 2\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)h - l_0^2$$

$$h^2 - 2\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)h + l_0^2 = 0 \quad (0{,}5)$$

13. La personne, dont la masse est de 70 kg, souhaite sauter d'un pont ayant une altitude de 60 m, avec 30 m de chute libre. Elle dispose, pour réaliser son saut, de deux cordes ayant des constantes de raideur $k_1 = 100$ N/m et $k_2 = 80$ N/m. Calculer explicitement la hauteur de chute pour chacune des cordes afin de déterminer laquelle des deux cordes doit être choisie. (**1.5 pts**)

$\Delta = 4\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)^2 - 4\ell_0^2 > 0 \quad h = \left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right) \pm \sqrt{\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)^2 - \ell_0^2}$

seule est acceptable, sinon $h < \ell_0$ 0,5

A.N: h avec $k_1 = 100$ N/m 58,3 m

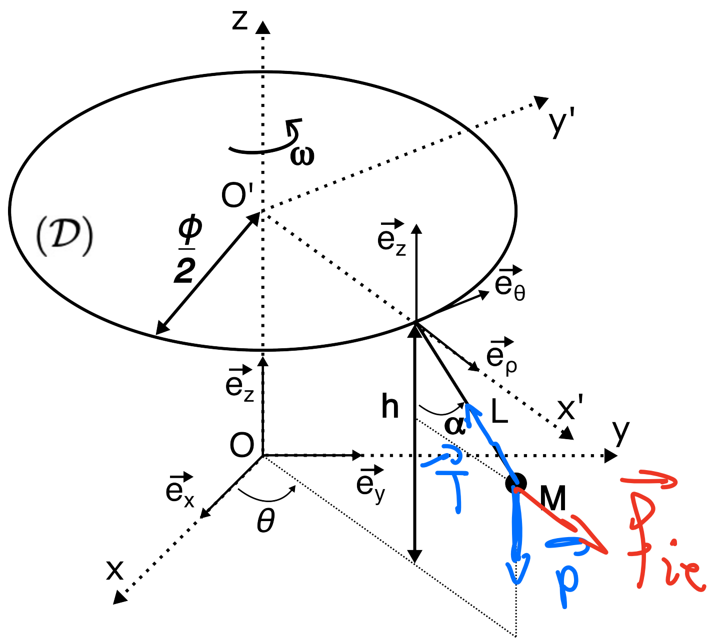
— $k_2 = 80$ N/m 62,8 m 0,5

La première: 0,5

Les chaises volantes / 10.5 pts

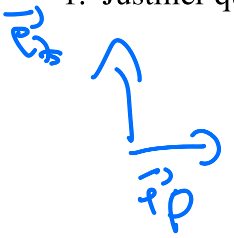
On se propose d'étudier dans cet exercice le mouvement des chaises volantes d'un manège. Le manège est modélisé par un disque rigide $\mathcal{D}$ de diamètre ϕ restant horizontal à une hauteur h du sol et tournant à vitesse constante ω autour d'un axe vertical fixe. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ matérialisé par (O, x, y, z) est considéré galiléen, le référentiel $\mathcal{R}'$ du disque est matérialisé par (O', x', y', z). La chaise et l'amateur ou l'amatrice de sensation qui y est assis sont assimilés à un seul point matériel M de masse m. On considère pour simplifier que ce point est à l'extrémité d'un dispositif rigide rectiligne fixée au disque qui l'astreint à demeurer dans le plan $(x'O'z)$ comme indiqué sur le schéma. Le mouvement de M est donc repéré par l'angle $\alpha(t)$ que le dispositif rigide fait avec la verticale.On s'intéresse au mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ que l'on décrira à l'aide de la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$. On ne détaille pas le dispositif, de sorte qu'on considérera dans un premier temps qu'il exerce sur M une force $(\vec{T})$ ayant des composantes non nulles inconnues dans chacune des directions de la base notées (T_ρ, T_θ, T_z). On négligera les frottements de l'air. On notera L la longueur du dispositif de maintien. On rappelle les définitions des accélérations d'entraînement et de Coriolis :

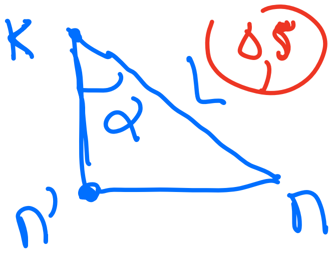
$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right),\ \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}.$$



On considère dans un premier temps que α est constant.

1. Justifier que $\overrightarrow{O'M} = (\frac{\phi}{2} + L\sin(\alpha))\vec{e}_\rho - L\cos(\alpha)\vec{e}_z$. **(0.5 pt)**





(0,5)

$\overline{M'M} = L\sin\alpha$

$\overline{M'K} = L\cos\alpha$

d'où $\overrightarrow{O'M} \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \end{vmatrix}$

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$. **(1 pt)**

$\vec{v}_{M/R'} = \vec{0}$ car α est constant et $\vec{e}_\rho, \vec{e}_z$ sont fixes dans R'

$\vec{a}_{M/R'} = \vec{0}$ (0,5) (0,5)

3. Ecrire les coordonnées du vecteur rotation $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$. **(0.5 pt)**

$\vec{\omega} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix}$

4. Calculer l'accélération d'entraînement du point M, dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$, en justifiant pourquoi certains termes sont nuls. (**1.5 pts**)

$\vec{a}_e = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$ car - $\vec{\omega}$ est constant
- O' ne se déplace pas (0,5)

$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \frac{\phi}{2} + L\sin\alpha \\ 0 \\ -L\cos\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\omega(\frac{\phi}{2} + L\sin\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{a}_e = -\omega^2(\frac{\phi}{2} + L\sin\alpha)\vec{e}_\rho$ (1)

5. Calculer l'accélération de Coriolis du point M, dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$. **(0.5 pt)**

$\vec{a}_c = \vec{0}$ car $\vec{v}_{M/R'} = \vec{0}$ (0,5)

6. Donner les expressions de chacune des forces subies par le point M dans le référentiel $\mathcal{R}'$, y compris les pseudo-forces d'inertie, dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$. **(1 pt)**

$\vec{P} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} \quad \vec{T} \begin{vmatrix} T_\rho \\ T_\theta \\ T_z \end{vmatrix} \quad \vec{F}_{ie} \begin{vmatrix} m\omega^2(\frac{\phi}{2} + L\sin\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

7. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, que peut-on dire de la composante T_θ de la force $\vec{T}$? (**1 pt**)

PFD :
$$\begin{cases} T_\rho + m\omega^2\left(\frac{\phi}{2} + L\sin\alpha\right) = 0 \\ T_\theta = 0 \\ T_z - mg = 0 \end{cases}$$
0,5

T_θ est nulle dans ce cas. 0,5

8. En admettant qu'on bloque le système dans un état tel que la force $\vec{T}$ est colinéaire au dispositif d'accroche. Représenter alors chacune des forces subies par le point M dans le référentiel $\mathcal{R}'$, y compris les pseudo-forces d'inertie, sur le schéma précédent. (**0.5 pt**)

La moitié si 1 fausse.

9. Exprimer alors $\tan(\alpha) = \frac{-T_\rho}{T_z}$. (**0.5 pt**)

$$\tan(\alpha) = \frac{\cancel{m}\omega^2\left(\frac{\phi}{2} + L\sin\alpha\right)}{\cancel{m}g}$$
0,5

10. Toujours dans cette situation, pour $\phi = 8$ m, $L = 4$ m et $\alpha = 60°$, quelle est la valeur de la vitesse angulaire du manège en tour/min ? (**1 pt**)

$$\omega = \sqrt{\frac{g\tan\alpha}{\frac{\phi}{2} + L\sin\alpha}}$$
0,5

$\Rightarrow \omega = 1{,}5$ rad/s

$\omega = 14{,}4$ t/min. 0,5

11. En considérant maintenant que α dépend du temps, exprimer de nouveau $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ dans la base $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$? (**1 pt**)

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \begin{vmatrix} L\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \\ L\dot{\alpha}\sin\alpha \end{vmatrix}$$
0,5

$$\Rightarrow \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} \begin{vmatrix} L\ddot{\alpha}\cos\alpha - L\dot{\alpha}^2\sin\alpha \\ 0 \\ L\ddot{\alpha}\sin\alpha + L\dot{\alpha}^2\cos\alpha \end{vmatrix}$$
0,5

12. Quelle(s) force(s) supplémentaire(s) apparaisse(nt) dans le bilan des forces dans le référentiel $\mathcal{R}'$? Donner leur expression. Que devient la composante T_θ dans ce cas ? (**1.5 pts**)

* $\vec{a}_e$ ne change pas. 0,5

* $\vec{a}_c$ devient : $\vec{a}_c \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} L\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \\ L\dot{\alpha}\sin\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2\omega L\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow$ pseudo-force

$\vec{F}_{ic} = -m2\omega L\dot{\alpha}\cos\alpha\,\vec{e}_\theta$ 0,5

$T_\theta = 2m\omega L\dot{\alpha}\cos\alpha$ 0,5