4AE-SE / 4AE FISA | INSA Toulouse
20 décembre 2023

DS Analyse des Systèmes Non-Linéaires

1h15 - seules une feuille A4 manuscrite recto-verso et une calculatrice de base sont autorisées
Il sera tenu compte dans la notation des justifications apportées

---

Exercice 1

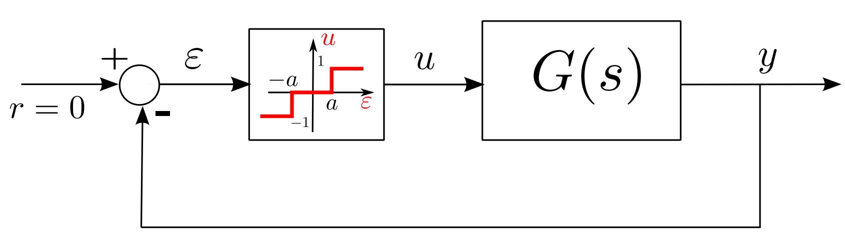
Soit le système non-linéaire d'ordre deux

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2(1 + x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_1(1 + x_1) \end{cases}$$

1. Déterminer les points d'équilibres.
2. Quelle est leur nature ?
3. A partir de la première méthode de Lyapunov, que pouvons-nous conclure quant à la stabilité de l'équilibre ?
4. Retrouver ce résultat avec la seconde méthode de Lyapunov, en utilisant la fonction candidate $V(x) = \frac{a}{2}x_1^2 + \frac{b}{2}x_2^2$, où a et b sont des degrés de liberté pour le calcul (constantes réelles positives).
5. Le résultat de stabilité est-il local ou global ?

Exercice 2

Considérons l'asservissement illustré sur la figure ci-dessous



avec la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}$$

La nonlinéarité est de type relais, de valeur égale à $\{-1, 0, 1\}$, avec une zone morte entre $-a$ et a. Son gain équivalent pour une approximation au premier harmonique est donné par :

$$N(A) = \begin{cases} 0 & \text{pour } A < a \\ \dfrac{4}{\pi A}\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{A^2}} & \text{pour } A \geq a \end{cases}$$

1. Calculer l'expression $C(A) = -1/N(A)$ et étudier son évolution en fonction de A, en particulier sa valeur maximale.
2. Tracer son allure dans le plan complexe.
3. Sachant que le lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ coupe l'axe des réels en $\omega = \sqrt{2}$ avec un gain $|G(j\sqrt{2})| = 2/3$, quelle est la condition sur a assurant l'absence de cycle limite pour l'asservissement ?

Exercice 3

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

1. Pour $u = 0$, à partir de la première méthode de Lyapunov, que peut-on conclure sur la stabilité de l'origine pour ce système ?
2. En appliquant le changement de variable $z = T(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sin x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, montrer que le système initial peut-être reformulé sous la forme :

   $$\dot{z} = Az + B\Big(\gamma(x)u - \psi(x)\Big)$$

   où A et B sont des matrices constantes, γ et ψ sont des fonctions scalaires de l'état x.

3. Quelle loi de commande permet de linéariser le système ? Calculer ensuite une commande par retour d'état pour placer les valeurs propres du système linéaire en z en -2 et -3.

Rappels

— dérivée utile : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$