Modes d'apprentissage et d'évaluation

18 CM/TDs + 4 TDs Outils Math + APP Méthodo (TP Smartphone)
3 séances de remédiation

- Une séance de TD se prépare :
  - on lit l'énoncé
  - on retourne dans ces notes de cours ou sur moodle pour se remémorer les points essentiels
  - on réfléchit et essaie de répondre aux questions

- Un CM se prépare :
  - on relit les notes de cours prises la fois précédente
  - On lit la partie de cours à venir (cours sur moodle, slides)

- 3 Evaluations basées sur un contrôle des micro-compétences suivantes
  - MP 1 : Connaitre les concepts généraux de la mécanique du point
  - MP 2 : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique

Ces micro-compétences définissent l'acquis spécifique MP0 mécanique du point.

Notation : A+ > 17
A > 14
B > 11
C > 8
D < 8

Ces micro-compétences servent aussi à la définition de macro-compétences transverses au niveau du Grand Domaine Sciences Physiques, Chimiques et Industrielles

Ressources en ligne

https://moodle.insa-toulouse.fr

-- Poly de cours (slides et format livre)
-- Enoncés des TDs
-- Exercices supplémentaires
-- Cartes mentales
-- Annales

Ouvrages recommandés

E. Hecht, Physique, ITP DeBoeck Université (1999)

A. Gibaud et M. Henry, Mécanique du point, Dunod

J.P. Faroux & J. Renault, Mécanique 1, Dunod , 4^{e} édition (1996)

J-P Pérez, Mécanique fondements et applications, Masson, 5^{e} édition (1997)

A. Colin, Berkley Mécanique, cours de physique volume 1, Collection U

Mécanique 1^{ere} et 2^{e} année, EdiScience-Dunod (2003)

R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, Les cours de physique de Feynman, Mécanique 1, Dunod (1999)

Introduction générale

- La mécanique permet de:

  - prévoir la trajectoire des corps massifs
  - calculer l'équilibre mécanique d'une structure
  - expliquer la propagation des sons
  - décrire l'interaction d'une particule avec les champs de gravité ou électromagnétique
  - …

- La mécanique est un des socles de la science moderne où la démarche scientifique moderne est apparue. C'est-à-dire la réalisation d'expérimentation spécifique afin de les confronter à une idée, une intuition, à une théorie.

- Concepts fondamentaux des sciences modernes nés avec la mécanique :

  - la quantité de mouvement et le moment cinétique de rotation
  - les interactions entre corps
  - la notion de travail d'une force, la notion d'énergie cinétique et d'énergie potentielle
  - les lois de conservations

Toutes ces notions apparaissent dans différents champs des sciences autres que la mécanique : la thermodynamique, la chimie etc…

La mécanique dans un cursus ingénieur

Génie Mécanique
Calcul de la cinématique et de la dynamique d'un robot d'une chaine de construction automobile
Calcul de la déformation d'une voiture lors d'un choc

Génie Civil
Calcul de la stabilité d'un pont et de sa résistance vis-vis d'une charge (vent, voitures et camions)
Calcul de l'acoustique d'une salle (isolation…)

Génie Physique
Détermination de la réponse d'un capteur de vitesse à une accélération
Détermination de l'influence d'un champ électromagnétique sur le mouvement des électrons dans un transistor

Génie Mathématique et Modélisation
Modélisation numérique de structure, de mécanique des fluides

Génie des Procédés et Environnement et Génie Biochimique
Détermination de l'écoulement de l'eau dans une centrale de retraitements des eaux usées ou l'écoulement de fluides dans un bioréacteur

CHAPITRE 1 :
Le mouvement, cinématique d'un point matériel

Les « savoir-faire » à acquérir en fin de chapitre

- Etre capable de **déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée** et **savoir calculer un produit scalaire** et **un produit vectoriel** à partir des coordonnées des vecteurs.

- Etre capable de **décrire précisément un mouvement**, c'est-à-dire déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ d'un point matériel à tout instant t.

- Etre capable de **faire cette analyse** dans la **base cartésienne**, dans la **base cylindrique** et dans la **base de Frenet**.

- Etre capable de **déterminer la position** d'un point matériel $\overrightarrow{OM}(t)$ à partir de son **vecteur accélération** $\vec{a}(t)$.

Introduction

L'objectif de la mécanique du point est d'expliquer et de prédire le **mouvement** d'un objet à partir des forces agissant sur lui.

Les trois paramètres décrivant le mouvement sont :
- la **position** de l'objet à un instant *t* donné,
- la **vitesse**
- l'**accélération**.

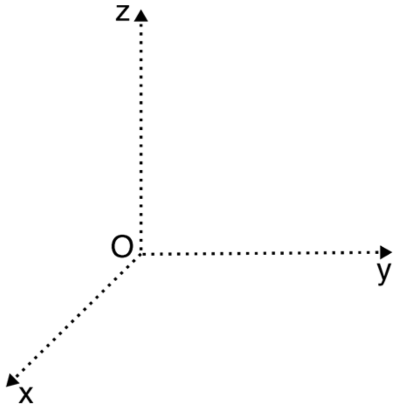
La vitesse et l'accélération d'un objet sont caractérisées par :
- leur amplitude
- leur direction.

$\Longrightarrow$ la notion de vecteur sera donc la plus adaptée pour décrire le mouvement.

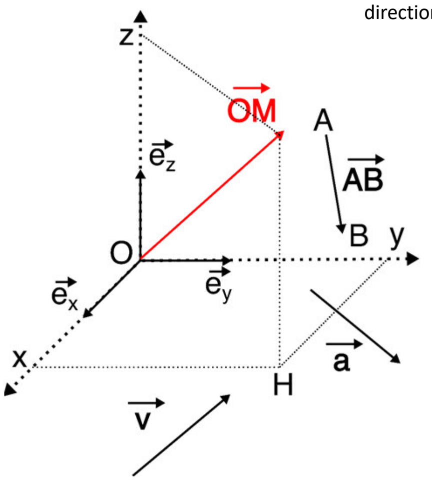
I-Analyse vectorielle

I.1) Définition basique d'un repère d'espace

Il faut utiliser trois axes (en général on les notes x, y, z) et une origine O pour localiser un point dans l'espace.



I.2) Généralités sur les vecteurs



Définition d'un vecteur

Un **vecteur**, généralement noté $\vec{v}$, est un objet mathématique qui possède à la fois une grandeur, une direction et un sens. La direction et le sens constituent l'orientation du vecteur.

Coordonnées du point *M*

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z}$$

Coordonnées d'un vecteur

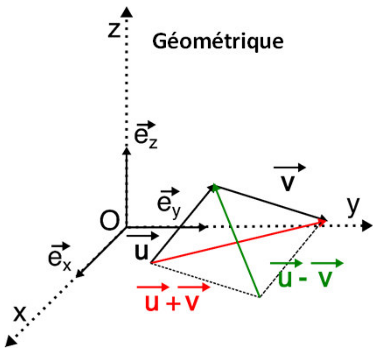
$$\vec{v} = v_x(x,y,z,t)\,\vec{e}_x + v_y(x,y,z,t)\,\vec{e}_y + v_z(x,y,z,t)\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \left| \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{matrix} \right.$$

Norme d'un vecteur

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

I.3) Addition et soustraction de vecteurs



Analytique

$$\vec{u} = a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y + c\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = a'\,\vec{e}_x + b'\,\vec{e}_y + c'\,\vec{e}_z$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{u} + \vec{v} = (a + a')\,\vec{e}_x + (b + b')\,\vec{e}_y + (c + c')\,\vec{e}_z \\ \vec{u} - \vec{v} = (a - a')\,\vec{e}_x + (b - b')\,\vec{e}_y + (c - c')\,\vec{e}_z\end{array}}$$

Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

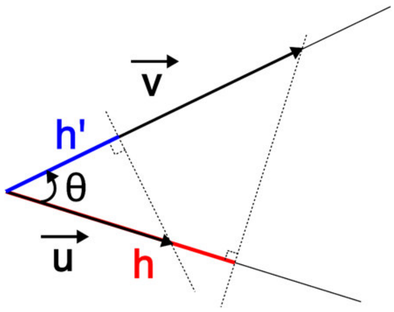
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array}\right.}$$

Quiz sur les vecteurs

I.4) Le produit scalaire

Définition géométrique

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\;\cos(\theta) = \|\vec{u}\|\;h = \|\vec{v}\|\;h'}$$



Le produit scalaire est :
- Commutatif : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$
- Distributif : $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$

Définition Analytique

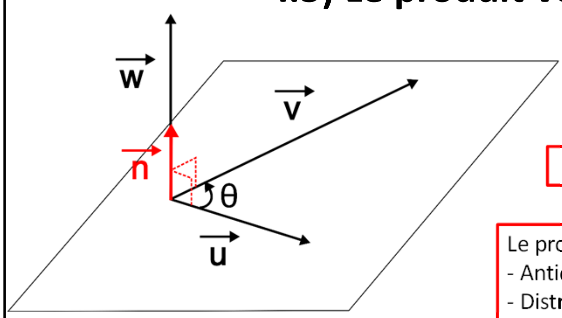
$$\vec{u} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \begin{vmatrix} a \\ b. \\ c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix} = ad + be + cf}$$

Expression d’un vecteur quelconque à l’aide du produit scalaire

$$\vec{u} = (\vec{u}\,.\,\vec{e}_x)\;\vec{e}_x + \left(\vec{u}\,.\,\vec{e}_y\right)\;\vec{e}_y + (\vec{u}\,.\,\vec{e}_z)\;\vec{e}_z$$

I.5) Le produit vectoriel



Définition géométrique

$$\boxed{\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\;sin(\theta)\;\vec{n}}$$

Le produit vectoriel est :
- Anticommutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- Distributif : $\vec{u} \wedge (\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Définition Analytique

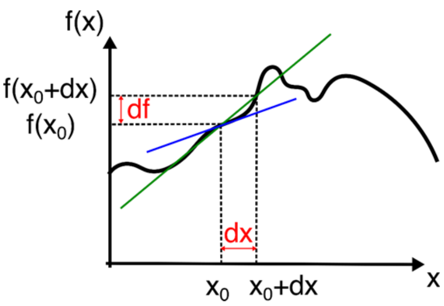
$$\boxed{\vec{u} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \; \vec{v} = \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix} \Longrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{vmatrix}}$$

Quiz sur les produits

I.6) Différentielle d'un vecteur

Rappel: Différentielle et dérivée d'une fonction scalaire f(x)

Variation de f autour de x_0 : $f(x_0 + dx) = f(x_0) + df$



Nombre dérivé

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{df}{dx}}$$

Fonction dérivée

$$\boxed{f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{df}{dx}}$$

Différentielle

$$df = f(x + dx) - f(x)$$

$$df = f'(x)\,dx$$

Différentielle et dérivée d'un produit de fonction

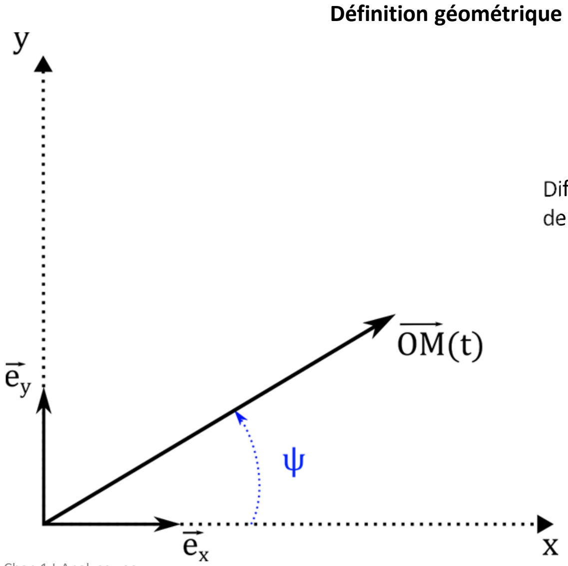
$$\boxed{\begin{gathered} d(fg) = (fg)'dx = f'g\,dx + fg'\,dx = g\,df + f\,dg \\ (fg)' = f'g + fg' \end{gathered}}$$

Dérivée d'une fonction composée

$$\boxed{\begin{gathered} d(g\ o\ f) = dg(f)\ df \\ (g\ o\ f)' = (g' o\ f)\ f' \end{gathered}}$$

I.6) Différentielle d'un vecteur

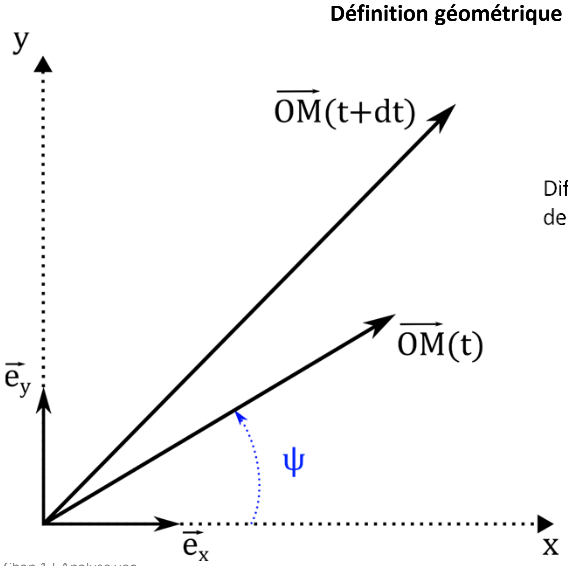
Définition géométrique



Différentielle d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre deux instants t et $t + dt$

I.6) Différentielle d'un vecteur

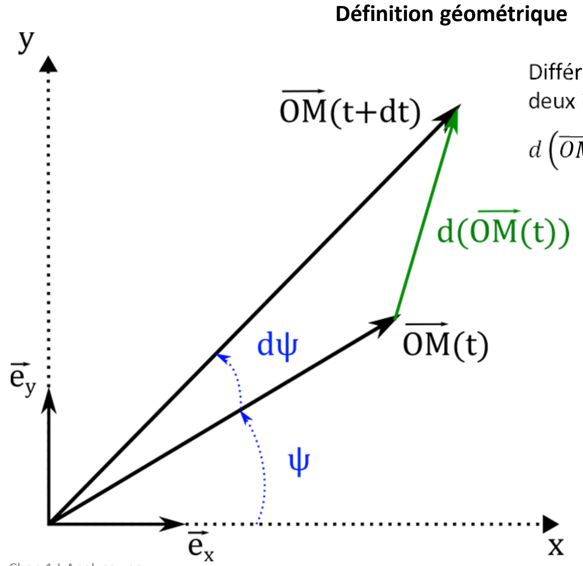
Définition géométrique



Différentielle d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre deux instants t et $t + dt$

I.6) Différentielle d'un vecteur

Définition géométrique

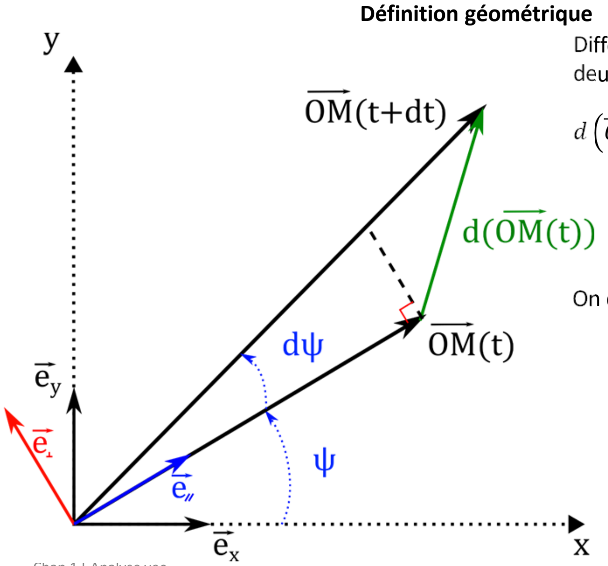


Différentielle d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre deux instants t et $t + dt$

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = \overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t)$$

I.6) Différentielle d'un vecteur

Définition géométrique



Différentielle d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre deux instants t et $t + dt$

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = \overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t)$$

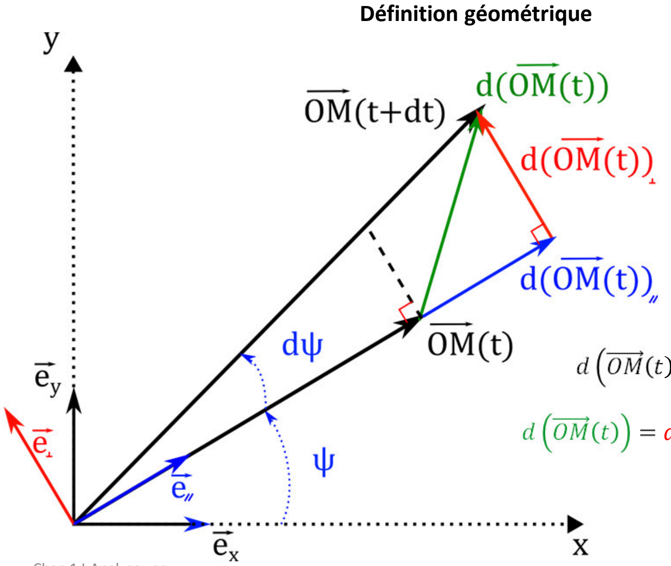
On définit $\vec{e}_{//}$ et $\vec{e}_{\perp}$ de telle sorte que

$$\overrightarrow{OM}(t) = \|\overrightarrow{OM}(t)\|\, \vec{e}_{//}$$

$$\vec{e}_{\perp} \perp \vec{e}_{//}$$

I.6) Différentielle d'un vecteur

Définition géométrique



$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)$$

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_\perp + d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_{//}$$

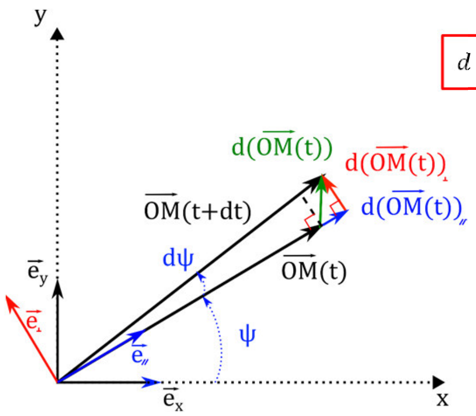
I.6) Différentielle d'un vecteur

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_\perp + d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_{//}$$

Lorsque $d\psi \to 0$ $\quad d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_{//} \to d\|\overrightarrow{OM}(t)\|\vec{e}_{//}$ $\quad d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_\perp = \left\|d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_\perp\right\|\vec{e}_\perp$

$$\Longrightarrow \|\overrightarrow{OM}(t)\|\tan(d\psi)\ \vec{e}_\perp \approx \|\overrightarrow{OM}(t)\|d\psi\ \vec{e}_\perp$$

$$\boxed{d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\|\overrightarrow{OM}(t)\|\ \vec{e}_{//} + \|\overrightarrow{OM}(t)\|d\psi\ \vec{e}_\perp}$$



I.6) Différentielle d'un vecteur

Définition analytique

$$\overrightarrow{OM}(t) = A(t)\,\vec{e}_x + B(t)\,\vec{e}_y$$

Rappel

$$d(fg) = (fg)'dx = f'g\,dx + fg'\,dx = g\,df + f\,dg$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d(A(t)\,\vec{e}_x) + d\big(B(t)\,\vec{e}_y\big)$$
$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\big(A(t)\big)\,\vec{e}_x + A(t)\,d(\vec{e}_x) + d\big(B(t)\big)\,\vec{e}_y + B(t)\,d(\vec{e}_y)$$

$$\boxed{d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\big(A(t)\big)\,\vec{e}_x + d\big(B(t)\big)\,\vec{e}_y}$$

I.7) Dérivée d'un vecteur par rapport au temps

$$\frac{d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)}{dt} = \lim_{dt\to 0}\left(\frac{\overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right) = \frac{d\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|}{dt}\,\vec{e}_{//} + \left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|\,\frac{d\psi}{dt}\,\vec{e}_{\perp}$$

ou

$$\frac{d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)}{dt} = \dot{A}(t)\,\vec{e}_x + \dot{B}(t)\,\vec{e}_y$$

I.8) Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

$\|\vec{e}\| = 1 \Longrightarrow d\|\vec{e}\| = 0$

$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\|\overrightarrow{OM}(t)\|\ \vec{e}_{//} + \|\overrightarrow{OM}(t)\| d\psi\ \vec{e}_{\perp}$

$d(\vec{e}) = d\|\vec{e}\|\ \vec{e}_{//} + \|\vec{e}\| d\psi\ \vec{e}_{\perp} = d\psi\ \vec{e}_{\perp}$

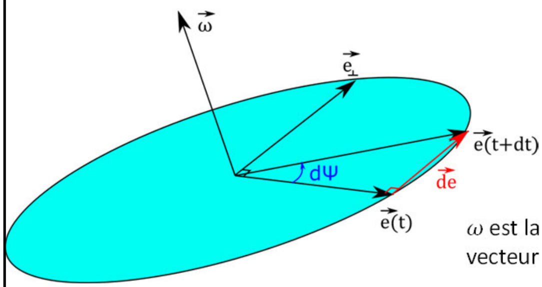
$\Longrightarrow d(\vec{e}) = d\psi\ \vec{e}_{\perp}$

$$\boxed{\frac{d(\vec{e})}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\vec{e}_{\perp}}$$

la différentielle (et la dérivée) d'un vecteur unitaire est un vecteur perpendiculaire à celui-ci.

Sa norme n'est cependant pas unitaire et vaut $d\psi$ dans le cas de la différentielle et $\frac{d\psi}{dt}$ dans le cas de la dérivée.

Vecteur rotation



$$\frac{d(\vec{e})}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\vec{e}_{\perp}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega$$

ω est la vitesse angulaire à laquelle tourne le vecteur $\vec{e}$.

On définit le vecteur $\vec{\omega}$ de la manière suivante :

- Le vecteur $\vec{\omega}$ est toujours perpendiculaire au plan de la rotation du vecteur $\vec{e}$.
- Sa norme est proportionnelle à la vitesse angulaire, soit $\|\vec{\omega}\| = \omega = \frac{d\psi}{dt}$
- Le sens du vecteur $\vec{\omega}$ dépend du sens de rotation du vecteur $\vec{e}$ selon la règle de la main droite.

$$\boxed{\frac{d(\vec{e})}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e} = \|\vec{\omega}\|\ \vec{e}_{\perp}}$$

Quiz sur la différentielle d'un vecteur

II) Définitions de base

II.1) Référentiels

L'analyse du mouvement dépend directement d'un **observateur,** qui a conscience de l'écoulement du temps, fléché du passé vers le futur. Il perçoit l'existence d'objets indépendamment de lui-même, localisés dans l'espace et pouvant se déplacer au cours du temps. Le mouvement est **relatif** à l'observateur.

On définit donc un **référentiel d'observation ou solide de référence** où l'observateur est fixe.

<u>Exemple</u> : chute d'un objet pour un observateur fixe et pour un observateur mobile

II.2) Point matériel

Point matériel = point géométrique modélisant un système de corps ou un solide dont la position est parfaitement **déterminée par la donnée de trois coordonnées et d'un paramètre temporel**.
En pratique le point matériel modélisant un système de corps ou un solide = **centre de gravité** auquel on associe toute la masse du système.

II.2) Repère d'observation et repère de temps

Le **repère d'observation se caractérise par une origine O fixe dans le référentiel choisi** (en général l'observateur) ainsi que **par trois axes de références orthonormés** $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ **fixes** (liés) dans le référentiel choisi. Leur norme, leur direction et leur sens ne varient pas.

Le repère de temps est constitué d'une origine, généralement l'instant où l'on connaît précisément la position et la vitesse d'un objet. A partir de cet instant initial, le temps ne peut que s'écouler dans un sens, du passé vers le futur. Le temps en mécanique classique est une notion absolue et non relative, elle ne dépend pas du mouvement de l'observateur.

Nous utiliserons la notation suivante pour définir un référentiel et son repère d'observation :

$$\boxed{\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)}$$

II.4) Base et repère d'espace

Lorsqu'on souhaite définir un référentiel avec un système de coordonnées possédant une base non fixe dans le référentiel, nous utiliserons le terme de **repère d'espace** et non repère d'observation.

Il existe d'autres **systèmes de coordonnées** telles que les coordonnées cylindriques, sphériques ou encore la base de Frenet.

A la différence des coordonnées cartésiennes, les vecteurs de bases orthonormés définissant les coordonnées cylindriques $\left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\right)$, la base de Frenet $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_b)$ ou la base sphérique $\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\right)$ **ne sont pas fixes** mais liés au point M.

Ces systèmes de coordonnées ne peuvent définir que des repères d'espace.

II.5) Trajectoires

La **trajectoire** d'un point matériel constitue **l'ensemble des positions de l'espace que ce dernier occupe au cours du temps.**

Il s'agit d'une ou plusieurs équations qui relie(nt) entre elles les différentes coordonnées d'un repère, par exemple $y = x^2 + 3$ et *z=0* dans le système de coordonnées cartésiennes. **Le paramètre temps *t* n'apparaît pas dans les équations de la trajectoire**.

Cependant, une trajectoire peut être parfaitement définie lorsque l'on connait l'évolution temporelle de toutes les coordonnées caractérisant la position d'un point matériel.

Nous parlons dans ce cas « d'équations horaires » dans lesquelles le paramètre t apparaît explicitement. Autrement dit, à chaque « valeur » du temps t, il est possible d'associer une position du point M dans l'espace, repérée par ses coordonnées.

Quiz sur les référentiels

III) Cinématique, description du mouvement dans différents systèmes de coordonnées

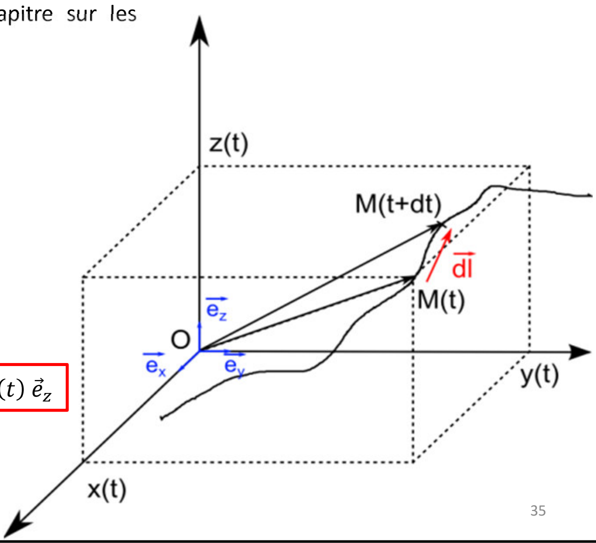
III.1) Repère cartésien

Le repère cartésien peut servir de repère d'observation comme on l'a vu précédemment ou de repère d'espace, *cf.* chapitre sur les changements de référentiels.

III.1.1) Vecteur position

Dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z}$$



Chap 1 III-Cinématique 35

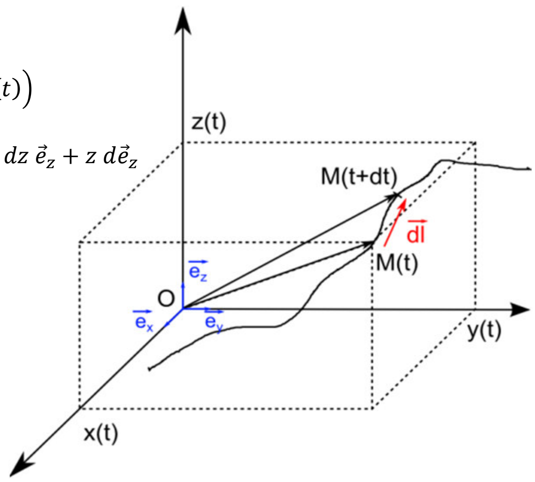
III.1.2) Vecteur déplacement élémentaire

Dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$

$$\vec{dl} = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t) = d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)$$

$$\vec{dl} = dx\,\vec{e}_x + x\,d\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + y\,d\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z + z\,d\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{dl} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z}$$



Chap 1 III-Cinématique 36

III.1.3) Vecteur vitesse

Dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$:

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\,\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\,\vec{e}_z = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z = \left| \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{matrix} \right.}$$

Unité de $\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\|$: m.s^{-1}.

III.1.4) Vecteur accélération

Le vecteur accélération donne plus d'informations que la variation scalaire de la vitesse. Il renseigne aussi le changement de direction du mouvement. C'est-à-dire que la vitesse peut garder en norme une valeur constante mais changer de direction. Son accélération est alors non nulle.

Dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$:

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{\overrightarrow{d^2l}}{dt^2} = \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{e}_z = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z = \left| \begin{matrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{matrix} \right.}$$

Unité de $\|\vec{a}_{M/\mathcal{R}}\|$: m.s^{-2}.

Quiz sur la cinématique cartésienne

III.2) Repère cylindrique

- Le repère cylindrique est orthonormé, constitué de trois vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ formant une base directe.
- Nous étudions le mouvement par rapport au référentiel d'observation $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. $\vec{e}_z$ est « fixe » dans ce référentiel tandis que les deux autres $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ sont mobiles.
- Le repère cylindrique est donc un repère d'espace. Il est très adapté pour décrire des mouvements de rotation autour d'un axe : circulaire, elliptique, hélicoïdale etc…

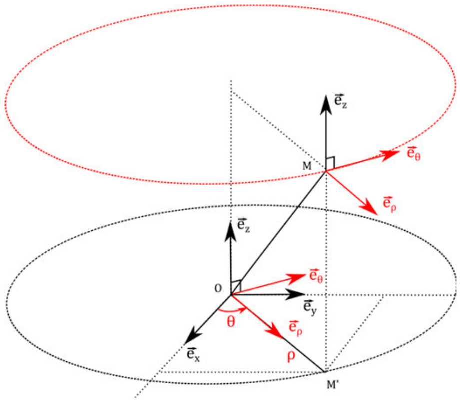
III.2.1) Vecteur position

La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O par ses coordonnées (ρ, θ, z).

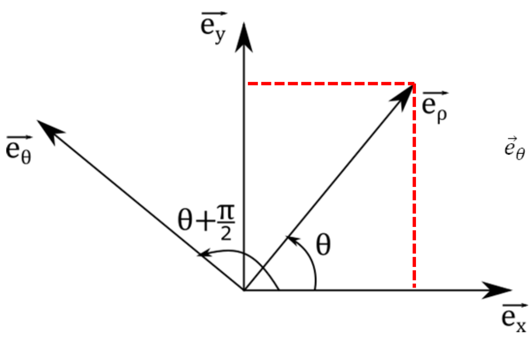
$$\rho = \left\|\overrightarrow{OM'}\right\| \text{ donc}$$

$$\vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM'}}{\rho}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\, \vec{e}_\rho + z\, \vec{e}_z}$$



Expression des vecteurs $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$ dans la base $\vec{e}_x, \vec{e}_y$



$$\vec{e}_\rho = \cos(\theta)\, \vec{e}_x + \sin(\theta)\, \vec{e}_y$$

Rotation de $+\frac{\pi}{2}$

$$\vec{e}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_x + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\, \vec{e}_x + \cos(\theta)\, \vec{e}_y$$

III.2.2) Vecteur déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\vec{e}_\rho + dz\,\vec{e}_z + z\,d\vec{e}_z = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\vec{e}_\rho + dz\,\vec{e}_z$$

$$d\vec{e}_\rho = \mathrm{d}(\cos(\theta(t))\,\vec{e}_x) + d(\sin(\theta(t))\,\vec{e}_y)$$
$$d\vec{e}_\rho = \mathrm{d}(\cos(\theta(t)))\,\vec{e}_x + d\left(\sin(\theta(t))\right)\vec{e}_y$$
$$d\vec{e}_\rho = -\sin(\theta(t))\,d\theta\,\vec{e}_x + \cos(\theta(t))\,d\theta\,\vec{e}_y$$
$$d\vec{e}_\rho = d\theta(-\sin(\theta(t))\,\vec{e}_x + \cos(\theta(t))\,\vec{e}_y)$$

$$d\vec{e}_\rho = d\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{\overrightarrow{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z = \left|\begin{array}{l} d\rho \\ \rho d\theta \\ dz \end{array}\right.}$$

III.2.3) Vecteur vitesse

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\,\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\,\vec{e}_z = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z = \left|\begin{array}{l} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{array}\right.}$$

Remarque : il ne faut pas confondre à ce stade référentiel et repère. L'expression précédente traduit bien la vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Cependant nous utilisons le repère d'espace cylindrique pour l'exprimer. Il faut être conscient que la vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$ attaché au repère d'espace cylindrique s'exprime différemment.
Elle est donnée par: $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{z}\,\vec{e}_z$

III.2.4) Vecteur accélération

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho\right) + \frac{d}{dt}\left(\rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z$$

$$d\vec{e}_\theta = \mathrm{d}(-\sin(\theta(t))\,\vec{e}_x) + d(\cos(\theta(t))\,\vec{e}_y)$$
$$d\vec{e}_\theta = -\cos(\theta(t))\,d\theta\,\vec{e}_x - \sin(\theta(t))\,d\theta\,\vec{e}_y$$
$$d\vec{e}_\theta = -d\theta\left(\cos(\theta(t))\,\vec{e}_x + \sin(\theta(t))\,\vec{e}_y\right)$$

$$d\vec{e}_\theta = -d\theta\,\vec{e}_\rho$$

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z = \left|\begin{matrix}\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\\ \ddot{z}\end{matrix}\right.}$$

Quiz sur la cinématique cylindrique

III.3) Repère sphérique

- Le repère sphérique est orthonormé, constitué de trois vecteurs unitaires $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ formant une base directe.
- Nous étudions le mouvement par rapport au référentiel d'observation $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Les trois vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ sont mobiles.
- Le repère sphérique est donc un repère d'espace. Il est très adapté pour décrire des mouvements dans un système à symétrie sphérique (géographie, mouvement à force centrale…)

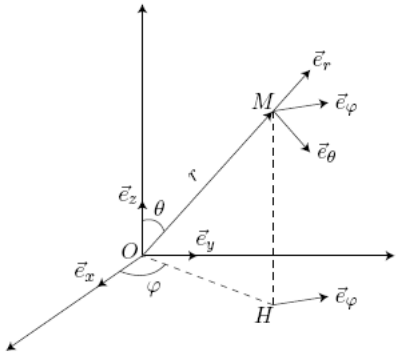
III.3.1) Vecteur position

La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O par ses coordonnées (r, θ, φ).

r = $\|\overrightarrow{OM}\|$ donc

$$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r}$$



Expression des vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ dans la base $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

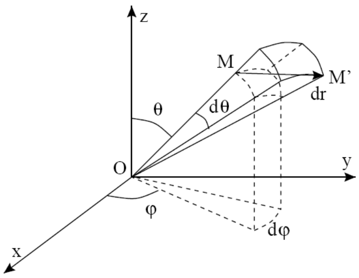
$$\vec{e}_r = \left| \begin{array}{c} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{array} \right.$$

$$\vec{e}_\theta = \left| \begin{array}{c} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{array} \right.$$

$$\vec{e}_\varphi = \left| \begin{array}{c} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{array} \right.$$

III.3.2) Vecteur déplacement élémentaire

$$\vec{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = dr\,\vec{e}_r + r\,d\vec{e}_r = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$



$$\boxed{\vec{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = \left| \begin{array}{c} dr \\ rd\theta \\ r\sin(\theta)d\varphi \end{array} \right.}$$

III.3.3) Vecteur vitesse

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left| \begin{array}{c} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r\dot{\varphi}\sin(\theta) \end{array} \right.}$$

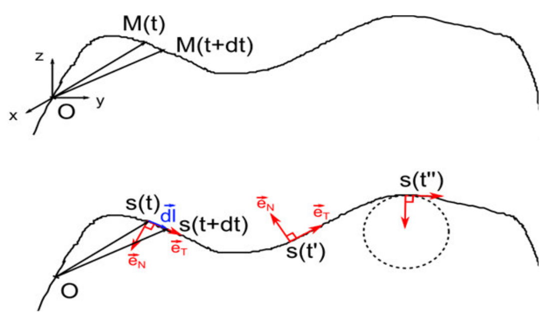
<u>Remarque</u> : il ne faut pas confondre à ce stade référentiel et repère. L'expression précédente traduit bien la vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Cependant nous utilisons le repère d'espace sphérique pour l'exprimer.

III.3.4) Vecteur accélération

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \left| \begin{array}{c} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \ - r\dot{\varphi}^2\sin^2(\theta) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ r\ddot{\varphi}\sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta) + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\theta) \end{array} \right.$$

III.4) Repère de Frenet

Ce repère est très adapté à l'analyse de mouvement dont on connaît la trajectoire. Les coordonnées cartésiennes du point *x(t), y(t)* et *z(t)* définissent une trajectoire à laquelle on peut associer une abscisse curviligne *s(t)* qui représente la distance parcourue entre O et le point M à l'instant t.



Le repère de Frenet est défini par trois vecteurs orthonormés $\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_B$ mobiles dans le repère d'observation $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$.

$\vec{e}_B$ est normal au plan défini par $\vec{e}_T$ et $\vec{e}_N$ appelé plan « osculateur ». On a :

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N$$

III.4.1) Expression de la position

Dans le repère de Frenet, nous ne pouvons pas définir explicitement le vecteur $\overrightarrow{OM}$. La position du point M est repérée dans le temps par l'abscisse curviligne *s(t)* sachant que la trajectoire est connue. Il est très important de noter que *s(t)* est un **scalaire**. Elle est homogène à une longueur.

III.4.2) Vecteur déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = ds\,\vec{e}_T$$

$$\|\overrightarrow{dl}\| = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}$$

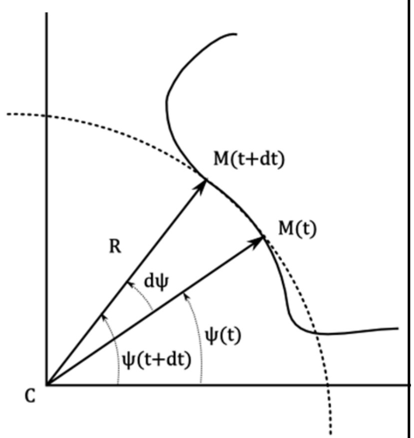
Nous pouvons définir le vecteur $\vec{e}_T$ à partir de la différentielle $d(\overrightarrow{OM})$:

$$\boxed{\vec{e}_T = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}}$$

III.4.3) Vecteur vitesse

Dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$:

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\vec{e}_T = \dot{s}\,\vec{e}_T = \|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\|\,\vec{e}_T}$$



III.3.4) Vecteur accélération

Dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$:

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\,\vec{e}_T\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\vec{e}_T + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\|}{dt}\,\vec{e}_T + \|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\|\,\frac{d\vec{e}_T}{dt}}$$

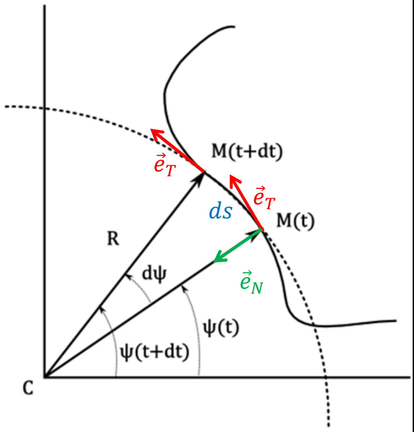
$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\vec{e}_N$$

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{ds}{ds}\frac{d\psi}{dt}\vec{e}_N = \frac{d\psi}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{e}_N$$

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d\psi}{ds}\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|\vec{e}_N$$

ds correspond à l'arc de cercle de rayon de courbure R définit par l'angle $d\psi$, avec :

$$R = \lim_{dt\to 0}\frac{M(t+dt)M(t)}{\psi(t+dt)-\psi(t)} = \frac{ds}{d\psi}$$



$$\boxed{\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|}{R}\vec{e}_N \Longrightarrow \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|}{dt}\vec{e}_T + \frac{\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|^2}{R}\vec{e}_N}$$

Quiz sur la cinématique Frenet

Quiz sur la notion de trajectoire

CHAPITRE 1 :
Le mouvement, cinématique d'un point matériel

Les « savoir-faire » à acquérir en fin de chapitre

- Etre capable de **déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée** et **savoir calculer un produit scalaire et un produit vectoriel** à partir des coordonnées des vecteurs.

- Etre capable de **décrire précisément un mouvement**, c'est-à-dire déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, le vecteur vitesse $\vec{v}(\mathrm{t})$ et le vecteur accélération $\vec{a}(\mathrm{t})$ d'un point matériel à tout instant t.

- Etre capable de **faire cette analyse dans la base cartésienne, dans la base cylindrique et dans la base de Frenet.**

- Etre capable de **déterminer la position d'un point matériel** $\overrightarrow{OM}(t)$ **à partir de son vecteur accélération** $\vec{a}(t)$.