NOM-Prénom : . . . . Groupe : . . . . . .

1A CC1 Mécanique du point (1h)

Lundi 4 novembre 2024

- Aucun document n'est admis. Une calculatrice est autorisée.
- Pensez à simplifier au maximum vos résultats.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

  MP : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

Ballon sonde

On modélise un ballon sonde par un point matériel (M) de coordonnées $(x(t), y(t))$. Le ballon est lâché depuis le point O à l'instant $t = 0$. Il acquiert quasi-instantanément une vitesse verticale v_0 qui demeure constante tout au long du mouvement. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x > 0$, orientée suivant l'axe (Ox), et proportionnelle à son altitude y $(y > 0)$ mesurée par rapport au niveau du sol : $v_x = \dfrac{y}{\alpha}$ où α est une constante positive. Nous allons étudier son mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.

1. Quelle est la dimension de α ? **(0,5 pt)**

homogène à un temps. $[\alpha] = T$ 0,5

2. Montrer que $y(t) = v_0 t$. **(1 pt)**

$\dot{y}(t) = v_0$

$\Rightarrow y(t) = v_0 t + y_0$ 0,75 $\Rightarrow y(t) = v_0 t$

or $y(0) = 0$ 0,25

3. Montrer que $x(t) = \dfrac{v_0 t^2}{2\alpha}$. **(1 pt)**

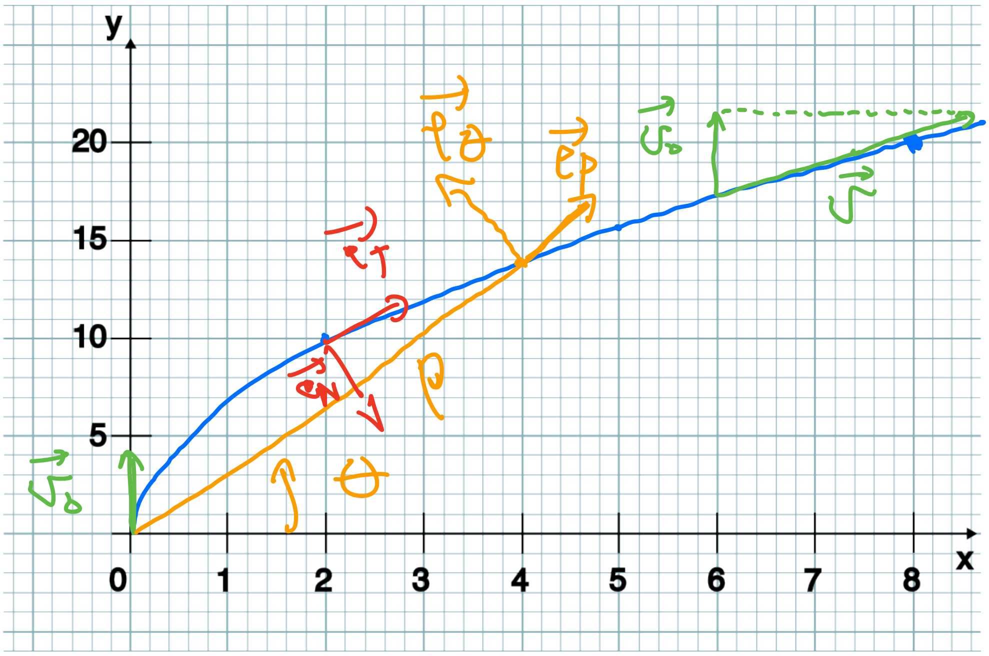
$\dot{x} = \dfrac{y}{\alpha} = \dfrac{v_0 t}{\alpha}$ or $x(0) = 0$ 0,25

$\Rightarrow x(t) = \dfrac{v_0 t^2}{2\alpha} + x_0$ 0,75 $\Rightarrow x(t) = \dfrac{v_0 t^2}{2\alpha}$

4. En déduire que l'équation de la trajectoire du ballon sonde est donnée par l'expression suivante : $y(x) = \sqrt{2 v_0 \alpha x}$. **(0,5 pt)**

$t = \sqrt{\dfrac{2\alpha x}{v_0}}$ 0,25 $\Rightarrow y(x) = \sqrt{2\alpha v_0 x}$ 0,25

5. Représenter cette trajectoire pour $x \in [0; 8]$ m, avec une vitesse ascensionnelle v_0 =5 m.s^{-1}, et α=5 s. (**1,5 pt**)



6. Avec les données de l'énoncé et le résultat de la question 2, écrire les composantes du vecteur vitesse dans la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ en fonction de v_0, α et t, puis calculer la norme du vecteur vitesse. (**1 pt**)

$$\vec{v} \left| \begin{matrix} \dfrac{v_0 t}{\alpha} \\ v_0 \end{matrix} \right.$$ (0,5)

$$\|\vec{v}\| = v_0 \sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2 + 1}$$ (0,5)

7. Représenter le vecteur vitesse du ballon sonde $\vec{v}$ à l'instant initial et à $x = 6$ m, en veillant à ce que les normes des vecteurs tracés soient représentatives de la situation physique. (**1 pt**)

(0,5) en $x = 0$ et (0,5) en $x = 6$

8. Exprimer les composantes de l'accélération du ballon sonde dans la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$. (**0,5 pt**)

$$\vec{a} \left| \begin{matrix} \dfrac{v_0}{\alpha} \\ 0 \end{matrix} \right.$$ (0,5)

9. Représenter les vecteurs de la base cylindrique $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$, ainsi que ρ et θ (coordonnées du point M) pour $x = 4$ m. (**1 pt**)

(0,75) (0,25)

10. Exprimer ρ en fonction de v_0, α et t. (**1 pt**)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0 t^2}{2\alpha}\right)^2 + (v_0 t)^2} = v_0 t \sqrt{\left(\frac{t}{2\alpha}\right)^2 + 1}$$

(0,5) (0,5)

11. Donner l'expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de v_0, α et t. (**1,5 pt**)

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{v_0 t^2/2\alpha}{v_0 t\sqrt{\left(\frac{t}{2\alpha}\right)^2+1}} = \frac{t}{2\alpha\sqrt{\left(\frac{t}{2\alpha}\right)^2+1}}$$

0,25 0,5

$$\sin(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{v_0 t}{v_0 t\sqrt{\left(\frac{t}{2\alpha}\right)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{2\alpha}\right)^2+1}}$$

0,25 0,5

12. Exprimer $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ dans la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ en fonction de v_0, α et t. (**1,5 pt**)

$$\vec{e}_\rho \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{e}_\rho \begin{vmatrix} \dfrac{t}{2\alpha\sqrt{\left(\frac{t}{2\alpha}\right)^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{2\alpha}\right)^2+1}} \end{vmatrix}$$

0,25 0,5

$$\vec{e}_\theta \begin{vmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{e}_\theta \begin{vmatrix} \dfrac{-1}{\sqrt{\left(\frac{t}{2\alpha}\right)^2+1}} \\ \dfrac{t}{2\alpha\sqrt{\left(\frac{t}{2\alpha}\right)^2+1}} \end{vmatrix}$$

0,25 0,5

13. Représenter les vecteurs de la base de Frenet $\vec{e}_T$ et $\vec{e}_N$, en $x = 2$ m. (**1 pt**)

0,5 0,5

14. Exprimer les coordonnées du vecteur $\vec{e}_T$ dans la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ en fonction de v_0, α et t. (**2 pt**)

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow \vec{e}_T \begin{vmatrix} \dfrac{t}{\alpha\sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1}} \end{vmatrix}$$

1 0,5 0,5

15. En se rappelant que $\{\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_B\}$ est une base orthonormée directe, donner les coordonnées de $\vec{e}_B$ en fonction de $\vec{e}_z$ puis déterminer les coordonnées de $\vec{e}_N$ dans la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$. (**2 pt**)

$$\vec{e}_B = -\vec{e}_z \qquad 0{,}5$$

$$\vec{e}_N = \vec{e}_B \wedge \vec{e}_T = -\vec{e}_z \wedge \vec{e}_T \qquad 0{,}5$$

$$\vec{e}_N = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dfrac{t}{\alpha\sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1}} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1}} \\ \dfrac{-t}{\alpha\sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1}} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad 1$$

16. Exprimer la composante normale de l'accélération a_N en fonction de v_0, α et t en calculant le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{e}_N$. (**1 pt**)

$$a_N = \vec{a} \cdot \vec{e}_N = \frac{v_0}{\alpha\sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1}} \qquad 1$$

17. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire en fonction de v_0, α et t. (**2 pt**)

$$a_N = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R} \qquad 0{,}5 \qquad R = \frac{\|\vec{v}\|^2}{a_N}$$

$$R = \frac{v_0^2\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1\right)}{\dfrac{v_0}{\alpha\sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1}}} = v_0\,\alpha\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1\right)^{3/2} \qquad 1{,}5$$