Commande d'un système de lévitation magnétique

L'objectif de cette manipulation est d'étudier l'asservissement en position d'une bille en lévitation. La dynamique nonlinéaire due à la force magnétique et le comportement naturellement instable du système rendent le problème de commande difficile. Il s'agit dans ce sujet de concevoir une loi de commande nonlinéaire afin d'assurer la stabilisation de l'équilibre du système. L'étude sera menée et testée entièrement en simulation sous MATLAB/Simulink.

1 Description du système

Le schéma du système de sustentation magnétique est illustré sur la Figure 1. Une source de courant contrôlable génère un courant i alimentant une bobine. Ce courant induit une force magnétique qui permet d'attirer une bille métallique de masse m.

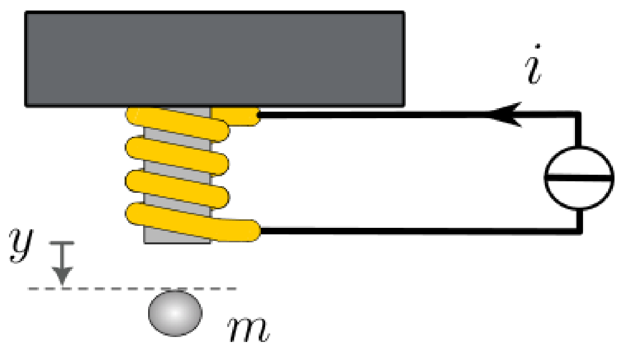

Figure 1 – *Système de lévitation magnétique.*

La bille est donc soumise à deux forces : la force magnétique et son poids. La différence entre ces forces entraine la mise en mouvement de la bille selon l'axe vertical.

2 Modélisation du système

Cette première partie du travail est une phase de modélisation afin de représenter le système dans un formalisme adapté aux méthodes de commande que nous allons appliquer par la suite. Il comprend également des questions d'analyses pour évaluer le comportement du système en boucle ouverte. A partir du principe fondamentale de la dynamique, nous pouvons écrire l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{y} = mg - F$$

où $g = 9.8\ m/s^2$ est l'accélération gravitationnelle et F la force magnétique induite par le courant dans la bobine (elle est définie ci-dessus).

1. En posant les variables d'états $x_1 = y$ et $x_2 = \dot{y}$, donner la représentation d'état du système. La valeur de référence souhaitée pour cet état est $x_{\text{ref}} = [r\ ,\ 0]^T$, r est constant et correspond donc la position de consigne pour y. Reformuler les représentation d'état dans la base de l'erreur $e = x - x_{\text{ref}}$.
2. Calculer l'évolution de l'état x pour une entrée nulle, $i = 0$. Récupérer le fichier Simulink et le script d'initialisation sur moodle, analysez-les et simuler cette réponse du système. Interpréter physiquement le résultat.
3. A partir du système erreur, déterminer les conditions d'équilibre. Quel courant d'équilibre i_* assure un équilibre à l'origine $e_* = 0$? Linéariser le système erreur autour de ce point d'équilibre tel que

$$\dot{e} \simeq A\, e + B\delta i$$

avec $\delta i = i - i_*$.
4. Analyser la stabilité du système linéarisé. Que peut-on conclure quant à la stabilité de l'origine pour le système nonlinéaire ?

3 Commande nonlinéaire par backstepping

Nous abordons maintenant la question de la commande en boucle fermée du système. Il s'agit de stabiliser le système erreur pour que son état e converge vers l'origine. L'objectif est donc de déterminer une loi de commande par retour d'état : $i^2 = \phi(e)$ pour la stabilisation de l'origine.

5. Reprenez la méthode de backstepping développée en séance de TD pour proposer une loi de commande nonlinéaire $i^2 = \phi(e, z)$.
6. Programmer votre loi sur Simulink et simuler le système en boucle fermée. L'état x converge-t'il vers l'équilibre souhaité ?
7. Remplacer l'expression de la loi du courant dans la représentation d'état en coordonnées erreur. Montrer que le système ainsi bouclé est linéaire.
8. Calculer les valeurs des gains (k_1 et k_2) de votre loi de telle sorte que, en boucle fermée, la dynamique ait un temps de réponse à 5% de l'ordre de 6 s et soit sans dépassement. Reprenez vos simulations avec les gains calculés.

4 Prise en compte de la dynamique du courant

Dans la partie précédente, nous avons fait l'hypothèse que le signal de commande du système était le courant i. En réalité, c'est sur la tension de commande u que nous pouvons agir, cf Figure 2. Le comportement du courant i est quant à lui régi par la dynamique du circuit électrique :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u$$

L étant l'inductance équivalente de l'électro-aimant.

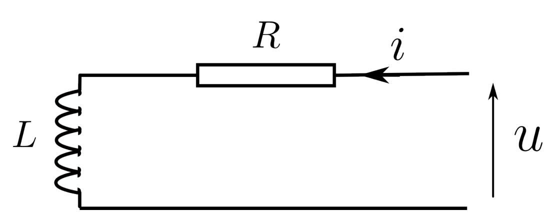

FIGURE 2 – *Circuit électrique.*

Dans le travail précédent, la méthode de backstepping a conduit à une reformulation du système sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1 e_1 + z \\ \dot{z} = g - \dfrac{K}{m(e_1+r)^2} i^2 + k_1 e_2 \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad e_2 = -k_1 e_1 + z$$

permettant de déterminer la loi de commande $i^2 = \phi(e, z)$, assurant la stabilité asymptotique de l'origine, démontrée à l'aide de la fonction de Lyapunov $V(e, z) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}z^2$.

9. Poursuivez la méthode de backstepping pour tenir compte de l'écart entre la valeur de courant idéal et sa valeur réelle. On posera la nouvelle variable d'état $w = i^2 - \phi(e, z)$. Exprimer le nouveau modèle d'état $(\dot{e}_1 \, , \, \dot{z} \, , \, \dot{w})$.
10. A partir de la fonction de Lyapunov candidate $V_3(e_1, z, w) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}w^2$, déterminer une loi de commande $u = \psi(e_1, z, w)$ assurant la stabilité asymptotique de l'origine pour le système complet.
11. Intégrer dans le modèle Simulink la dynamique du courant, on prendra les valeurs $L = 1\, mH$, $R = 10\, \Omega$ et la condition initiale $i_0 = 0.1\, A$. Puis, tester votre loi de commande.