NOM-Prénom : . . . .   Groupe : . . . . . .

1A CC2 Mécanique du point (1h)

Lundi 2 décembre 2024

- Aucun document n'est admis. Une calculatrice est autorisée.
- Pensez à simplifier au maximum vos résultats.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

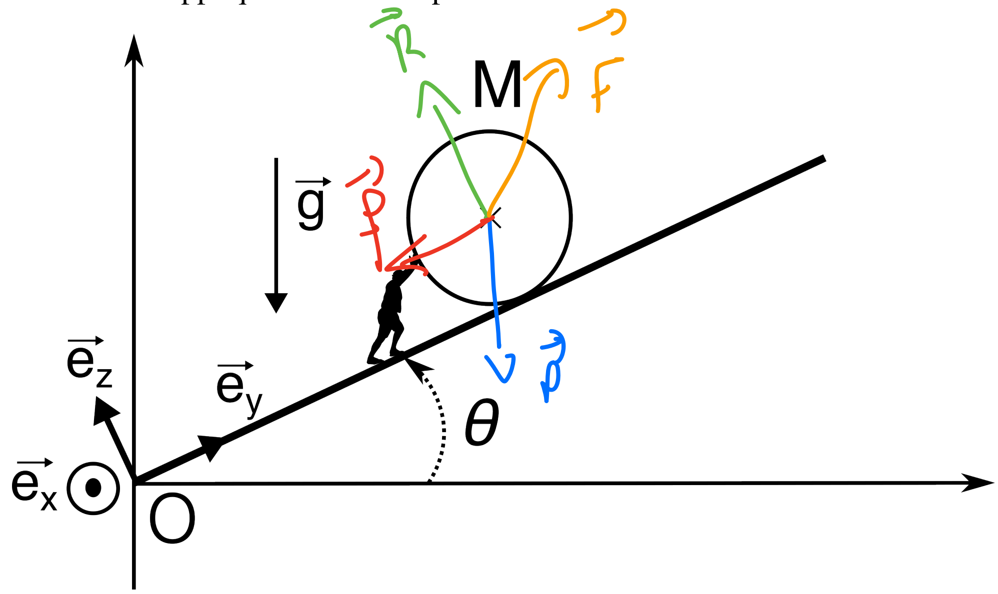
  MP : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

Pousser le caillou (11 Points)

Sisyphe a été condamné par les dieux, pour avoir déjoué la mort, à pousser indéfiniment un rocher en haut d'une colline du Tartare qui en redescend à chaque fois avant de parvenir au sommet. Le bloc de masse m est matérialisé par un point M qui glisse sur le sol mais ne roule pas. Ce rocher est poussé par Sisyphe dans une pente d'inclinaison θ. Le bloc reste en permanence en contact avec le sol. La force de poussée $\vec{F}$ exercée par Sisyphe sur le bloc est telle que :

$$\vec{F} = F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z,$$

avec $F_y,\ F_z > 0$ des constantes. Par ailleurs on néglige les frottements de sol. Par contre les dieux étant particulièrement vicieux, ils font souffler du vent dans le sens opposé au mouvement, ce qui amène une force de frottement, de type fluide visqueux, proportionnelle à la vitesse du rocher, caractérisée par un coefficient α selon (Oy). Le champ de pesanteur est $\vec{g}$. Le mouvement de la masse m est étudié dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ muni d'un repère d'observation $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. A l'instant $t = 0$ le bloc a une vitesse nulle et se trouve en $(0, y_0, 0)$. On rappelle que malgré la figure, M est un point matériel et donc que les forces s'appliquent toutes au point M.



1. Justifier que le vecteur vitesse de la masse m n'a pas de composante selon (Ox) ni (Oz) et peut donc s'écrire $\vec{v}_M = v\vec{e}_y$. **(0,5 pt)**

pas de force sur (Ox), $x(0)=0$ $x(t)=0$ /0,25 $\Rightarrow \vec{v}_n = v\vec{e}_y$

le bloc reste au contact du sol $z(t)=0$ /0,25

2. Comment s'écrit le vecteur accélération du point M, $\vec{a}_M$, dans la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ en fonction de v ? **(0,5 pt)**

$\vec{a}_n = \dot{v}\vec{e}_y$ /0,5

3. Représenter toutes les forces subies par le rocher sur le schéma. (**1 pt**) $4 \times 0{,}25$
4. Donner les expressions de toutes ces forces dans la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$. (**1,5 pt**)

$$\vec{P}\begin{vmatrix} 0 \\ -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{vmatrix} \quad \vec{R}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{vmatrix} \quad \vec{f}\begin{vmatrix} 0 \\ -\alpha v \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{F}\begin{vmatrix} 0 \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix}$$

0,75 0,25 0,25 0,25

5. En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD), montrer que l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la vitesse selon (Oy) est de la forme $\dot{v} + Av = B$, avec A, B des constantes que vous écrirez en fonction de α, m, g, θ, et F_y ? (**1,5 pt**)

$$m\dot{v} = -mg\sin\theta - \alpha v + F_y \quad 0{,}5$$

$$\dot{v} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{A} v = \underbrace{-g\sin\theta + \frac{F_y}{m}}_{B} \quad 1$$

6. Quelle est la valeur de la norme de la réaction en fonction de $m,\ g,\ \theta$, et F_z ? (**1 pt**)

PFD sur $(Oz) \Rightarrow \quad R = mg\cos\theta - F_z$

0,25 0,75

7. Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question 5 pour donner l'expression temporelle de la vitesse du bloc en fonction de $m, \alpha, g, \theta, F_y$ et t. (*Ou en fonction de A et B si vous n'avez pas su répondre à la question 5*) (**3 pt**)

Eq diff 1^er ordre à coeff constant avec 2^nd membre

Sol Eq homogène : $v_0(t) = C_1 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ 1

Sol particulière : $v_p = \frac{F_y}{\alpha} - \frac{mg\sin\theta}{\alpha}$ 0,5

Condition initiale $v(0) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{mg\sin\theta - F_y}{\alpha}$ 0,5

$$v(t) = \frac{F_y - mg\sin\theta}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) \quad 1$$

8. Quelle condition doit respecter la composante F_y de la force de poussée pour que le bloc monte ? (**1 pt**)

$v \geq 0$ si $F_y \geq mg \sin\theta$

0,25 0,75

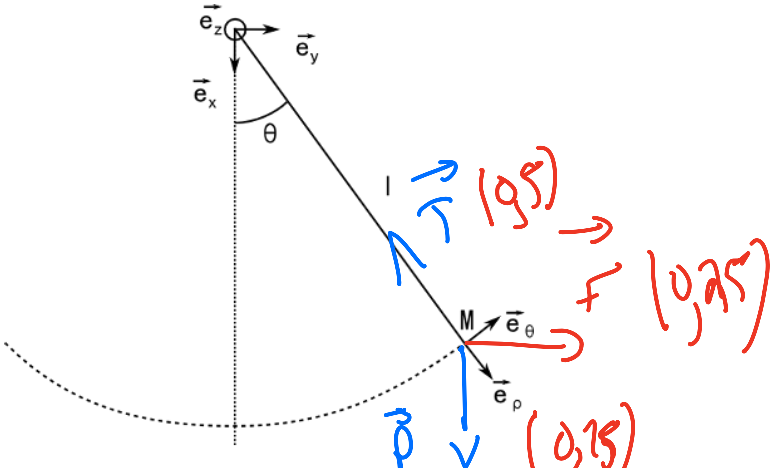
9. Jusqu'à quelle valeur de la composante F_z peut-on toujours faire l'hypothèse que le bloc reste en contact avec le sol au cours du mouvement ? (**1 pt**)

$F_z \leq mg \cos\theta$

1

Pendule électrostatique (9 Points)

Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium, suspendue à une potence par un fil de masse négligeable de longueur l. La boule est préalablement chargée avec une charge électrique $Q > 0$ et possède une masse m. L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent une force électrique constante $\vec{F} = QE_o\vec{e}_y$ sur la boule, où E_o désigne le champ électrique qui règne entre les plaques. Lors de l'expérience le fil reste tendu.



1. Exprimer les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$ et vitesse $\vec{v}_M$ de la masse m dans la base $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta\}$. (**1 pt**)

$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{v}_M = \rho\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

0,25 0,75

2. Représenter toutes les forces agissant sur la masse m sur le schéma. (**1 pt**)
3. Donner les expressions de toutes ces forces dans la base $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta\}$. (**1,5 pt**)

$\vec{P}\begin{vmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{vmatrix}$ $\vec{F}\begin{vmatrix} QE_0\sin\theta \\ QE_0\cos\theta \end{vmatrix}$ $\vec{T}\begin{vmatrix} -T \\ 0 \end{vmatrix}$

0,5 0,5 0,5

4. Démontrer que le moment cinétique de la masse m par rapport au point O est de la forme $\vec{L}_O = K\dot{\theta}\vec{e}_z$, avec K une constante que vous écrirez en fonction de m, l. (**1,5 pt**)

$\vec{L}_{/O} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \begin{vmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ ml\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ ml^2\dot{\theta} \end{vmatrix}$ 0,5

$\vec{L}_{/O} = \underbrace{ml^2}_{K}\dot{\theta}\,\vec{e}_z$ 1

5. Calculer les moments des forces subies par la masse m par rapport au point O. (**1,5 pt**)

$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}/O} = \vec{OM} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mgl\sin\theta \end{vmatrix}$ 0,5

$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} QE_0\sin\theta \\ QE_0\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ QlE_0\cos\theta \end{vmatrix}$ 0,5

$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{T}/O} = \vec{0}$ 0,5

6. Appliquer le théorème du moment cinétique puis déterminer l'angle θ_{eq} correspondant à la position d'équilibre lorsque le champ électrique est appliqué sur le pendule, en fonction de m, g, E_o, Q. (**2 pt**)

$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\,\vec{e}_z = \sum \vec{\mathcal{M}} = \left(-mgl\sin\theta + QlE_0\cos\theta\right)\vec{e}_z$ 0,5

à l'équilibre $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow -mgl\sin\theta + QE_0l\cos\theta = 0$ 0,5

$\tan\theta = \frac{QE_0}{mg}$ 1

7. Quelle est la valeur numérique de θ_{eq} pour m= 20 g, g= 9,81 m.s^{-2}, Q= 2,3 10^{-4} C et E_o= 500 V.m^{-1}. (**0,5 pt**)

$\tan\theta = \frac{2{,}3\cdot 10^{-4} \times 500}{0{,}02 \times 9{,}81} \simeq 0{,}586$

$\theta \simeq 30{,}4°$ 0,5