Chapitre Rappel

lundi 25 janvier 2021 10:53

Rappel de maths :

* $\vec{\nabla} \wedge \vec{X} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_z}{\partial y} - \dfrac{\partial X_y}{\partial z} \\ -\left[\dfrac{\partial X_z}{\partial x} - \dfrac{\partial X_x}{\partial z}\right] \\ \dfrac{\partial X_y}{\partial x} - \dfrac{\partial X_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \overrightarrow{rot}\, \vec{X}$

* $\forall f, \quad \vec{\nabla} \wedge (\underbrace{\vec{\nabla} f}_{\overrightarrow{grad}\, f}) = \vec{0} \iff \boxed{\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{grad}\, f) = \vec{0}}$

* $\forall \vec{u}, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = 0 \iff div\,(\overrightarrow{rot}\, \vec{u}) = 0$

Rem : • $div\, \vec{B} = 0$ donc il existe $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\, \vec{A}$

• $\overrightarrow{rot}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donc $\overrightarrow{rot}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\, \vec{A})$

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{E} + \overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}\left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right] = \vec{0}$$

$\exists\, V$ telle que $\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\, V$

et $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$

26/01 :

Equation de propagation de $\vec{B}$: ⚠ Dans le vide $\left(\begin{matrix} \rho = 0 \\ \vec{j} = \vec{0} \end{matrix}\right)$

$$\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\, \vec{B}) = \overrightarrow{grad}\,(div\, \vec{B}) - \Delta \vec{B}$$

$$\overrightarrow{rot}\left[\mu_0\left(\cancel{\vec{j}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\right] = \overrightarrow{grad}\,(\vec{0}) - \Delta \vec{B}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0\, \overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{B}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right) = -\Delta \vec{B}$$

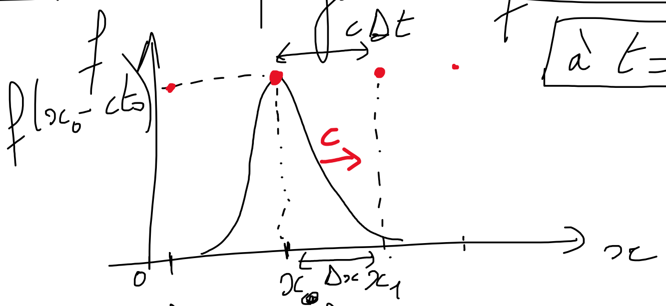
$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(-\frac{d\vec{B}}{dt}\right) = -\Delta \vec{B}$$

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\vec{B}}{dt^2} = \vec{0}}$$

Rem: $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$

Déplacement de la fonction $f(x-ct)$:

$\boxed{\text{à } t = t_0}$



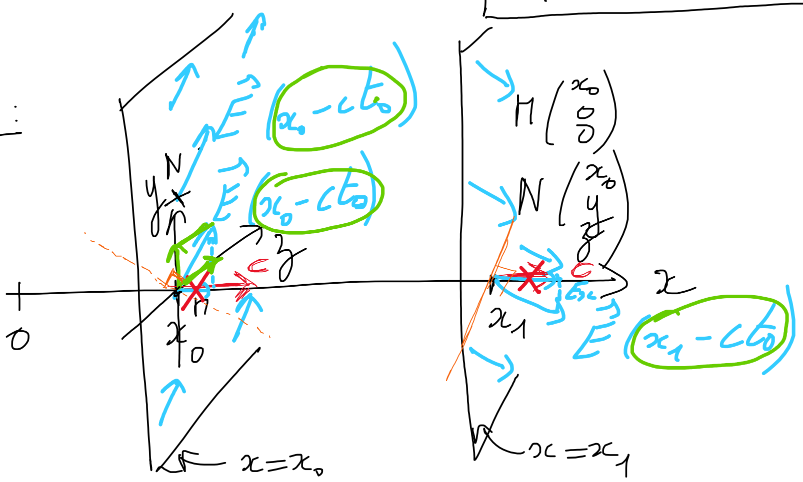
Où est la fonction f à $t = t_1$ avec $t_1 = t_0 + \Delta t$?

On cherche x_1 tel que $f(x_1 - ct_1) = f(x_0 - ct_0)$

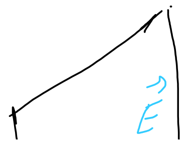
$$x_1 - ct_1 = x_0 - ct_0 \iff \boxed{x_1 = x_0 + c\Delta t}$$

Plan d'onde :

à $t = t_0$

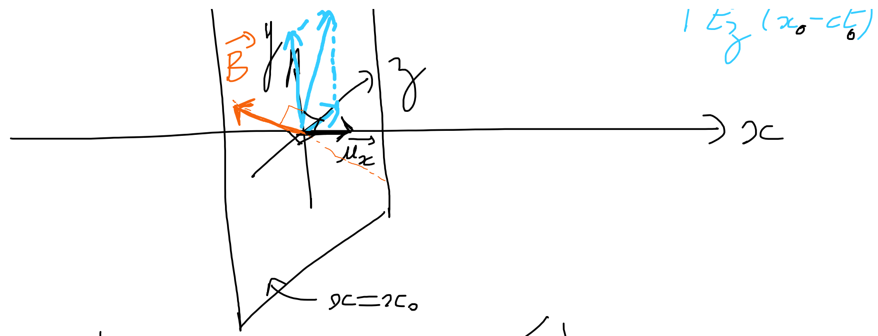


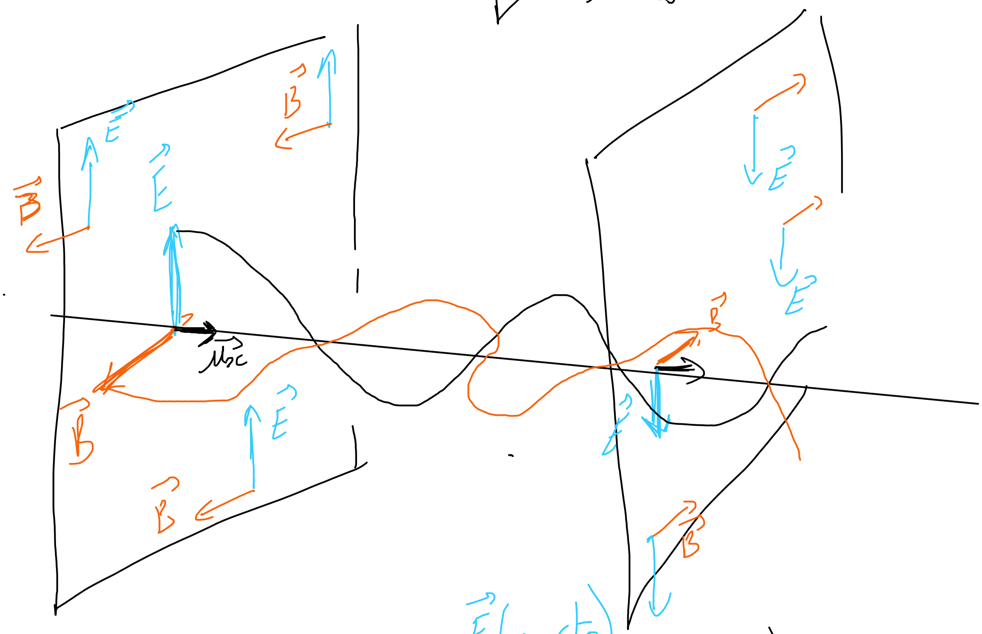
Structure de l'onde :



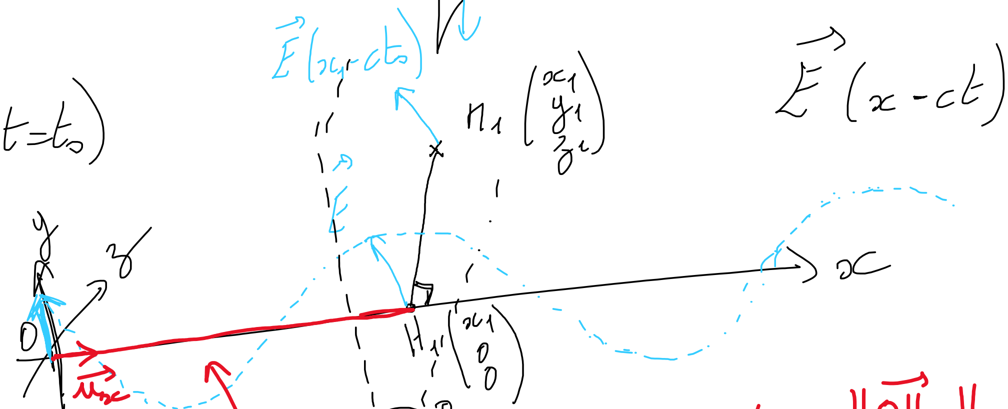
$$\vec{E} = \left| \begin{matrix} 0 \\ E_y(x_0 - ct_0) \\ \end{matrix} \right.$$

à $t = t_0$





Rem : (à $t = t_0$)



distance parcourue $= OH_1 = \|\overrightarrow{OH_1}\|$

$$= \vec{u}_x \cdot \overrightarrow{OH_1}$$

$$= \vec{u}_x \cdot \left(\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{H_1M_1}\right)$$

$M_1 \in \mathcal{S} \perp (Ox)$

$$= \vec{u}_x \cdot \overrightarrow{OM_1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1$$

On pourrait écrire :

$$\vec{E}(x - ct) = \vec{E}(\underbrace{\vec{u}_x \cdot \overrightarrow{OM}}_{} - ct)$$

avec $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire de la direction de propagation.

OPPM :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos\left[A(x - ct)\right]$$

avec A tel que $A(x-ct) \equiv$ angle.

Donc $[A] = \dfrac{\text{rad}}{\text{m}}$.

On définit $\lambda \equiv$ longueur d'onde $\equiv$ période spatiale

et $A = \dfrac{2\pi}{\lambda} = k$: le nombre d'onde

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right]$$

$$= \vec{E}_0 \cos(kx - k.c.t)$$

$$= \vec{E}_0 . \cos(kx - \omega t) \quad \text{avec } \omega = k.c$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}.c$$

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 . \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{T}$$

$$= 2\pi\nu$$

On a : λ : période spatiale.

T : période temporelle.

De façon générale, on écrit une OPPM au point M et à l'instant t avec son champ $\vec{E}$ de la forme :

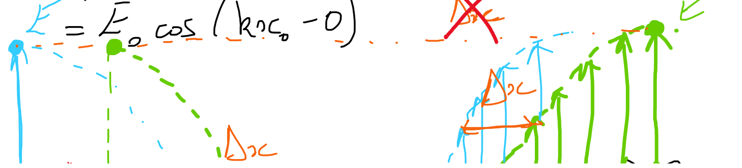
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 . \cos(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)$$

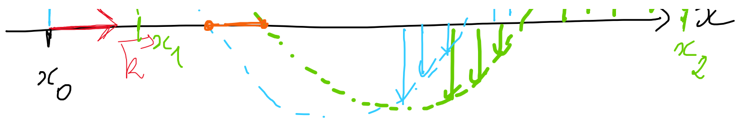
Vitesse de phase : à $t=0$: $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx_0 - 0)$ — à $t = +\Delta t$

$\varphi(x_2, \Delta t) = kx_2 - \omega\Delta t$

$= kx_1 - \omega\Delta t + 2\pi$

$= kx_0 + 2\pi$





$$\vec{E}(x_0,0) = \vec{E}(x_1,+\Delta t)$$

$$\vec{E}_0 \cos(kx_0) = \vec{E}_0 \cdot \cos(kx_1 - \omega \Delta t)$$

$$\Rightarrow \quad kx_0 = (kx_1 - \omega\Delta t)\ \cancel{\boxed{2\pi}}$$

car on cherche la vitesse à phase constante.

$$\omega \Delta t = k(x_1 - x_0) = k\,\Delta x$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

La démonstration est équivalente si on choisit l'instant $t = dt$

$$v_\varphi = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\varphi = cste} = \frac{\omega}{k}$$

<u>Rem</u>: "A phase constante" implique que $d\varphi = 0$

A savoir faire !

$$\varphi(x,t) = kx - \omega t$$

$$d\varphi(x,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$$

$$d\varphi = 0 = k\,dx - \omega\,dt \Leftrightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\varphi = cste} = \frac{\omega}{k} = v_\varphi.$$

<u>Utilisation de la notation complexe</u>:

* Les dérivées secondes de "cos" et "sin" donnent "$-\cos$" et "$-\sin$".

De même pour les dérivées secondes des fonctions "$e^{i(\dots)}$" $\longrightarrow$ "$(i)^2 e^{i(\dots)} = -e^{i(\dots)}$"

* En utilisant le fait que $\cos(\ldots) = \mathrm{Re}\left[e^{i(\ldots)}\right]$

et que $\frac{d\cos(u)}{du} = \mathrm{Re}\left[\frac{de^{iu}}{du}\right]$, on peut

"remplacer" les fonctions "cos" dans nos calculs d'équations différentielles par des "$e^{i\ldots}$" pour se ramener à des équations scalaires.

Par exemple : $\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$ avec $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0\cos(kx-\omega t)$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}_0\cdot\left[-k^2\cos(kx-\omega t) - \frac{1}{c^2}\cdot\left[-(-\omega)^2\right]\cos(kx-\omega t)\right] = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}_0\cdot\left[\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right]\cdot\cos(kx-\omega t) = \vec{0}$$ en tout pt M de t et à tout instant t.

Donc $\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0}$ $(\vec{E}_0 \neq \vec{0})$

Si on refait le même calcul avec $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$,

on retombe sur exactement la même équation scalaire entre k, ω et la vitesse de propagation

Rem : • On retrouve les expressions réelles de $\vec{E}$ (et $\vec{B}$) en prenant les parties réelles de $\underline{\vec{E}}$ (et $\underline{\vec{B}}$) :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\underline{\vec{B}}(\vec{r},t)\right]$$

• Le terme dans l'exponentielle complexe est la phase du champ au point M et à l'instant t :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 . e^{i\varphi(\vec{r},t)} \quad \text{avec } \varphi(\vec{r},t) = \vec{k}.\vec{r} - \omega t$$

Écrire les 4 équ. de Maxwell grâce à la not. cplx :

- $\operatorname{div} \vec{E} = 0 \iff \vec{\nabla}.\underline{\vec{E}} = 0$
  $\iff i\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$
  $\iff \vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$
  $\iff \vec{k}$ et $\vec{E}$ sont orthogonaux.
- idem pour $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$
- $\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \iff \vec{\operatorname{rot}}\, \underline{\vec{B}} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$
  $\iff \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{B}} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$
  $\iff i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \dfrac{-i\omega}{c^2} . \underline{\vec{E}}$
  $\iff \underline{\vec{E}} = -c^2 \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}$
  $\iff \boxed{\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}}$

Rem : Une OPPM n'a pas de sens physique !

$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$ est définie pour

$t \in]-\infty, +\infty[$ et $x \in]-\infty, +\infty[$

(et $\forall y$, et $\forall z$) n'a pas de sens réel !