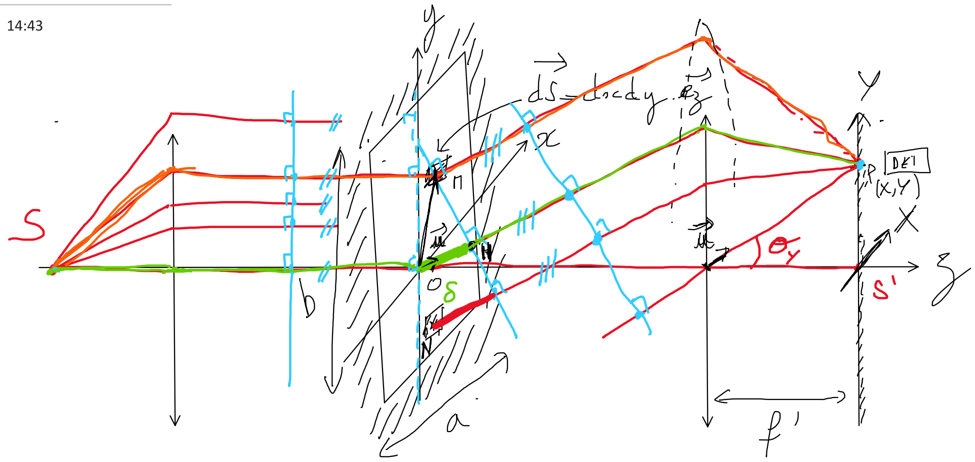
Chapitre 3 : Diffraction

mardi 2 mars 2021 14:43



Tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ est point source secondaire. Ils sont mutuellement tous cohérents entre eux.

On va calculer $\underline{A}_T(P) = \iint_{S_{ouverture}} \underline{a}_M(P)$

avec $\underline{a}_M(P) = \underbrace{A_0 . dS}_{a_0} e^{i\varphi_M(P)}$

On utilise le rayon passant par O comme rayon de référence :

$$\underline{a}_M(P) = A_0 dS \; e^{i[\underbrace{\varphi_M(P) - \varphi_0(P)}_{\Delta\varphi(P)} + \varphi_0(P)]}$$

$$\underline{a}_M(P) = A_0 dS \; e^{i\varphi_0(P)} . e^{i\Delta\varphi(P)}$$

avec $\Delta\varphi(P) = -k_0 . \delta = -k_0 . \overline{OH} = -k_0 \, \vec{u} . \overrightarrow{OM}$

On note $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ (on sait que α, β et γ dépendent de la position du détecteur (point P) et de la focale f')

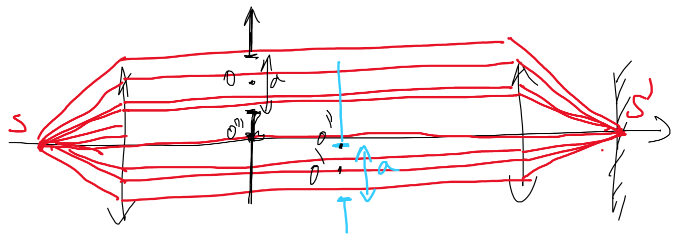
Donc, comme $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Delta\varphi(P) = -k_0(\alpha x + \beta y)$

Au final $\underline{a}_M(P) = A_0 . e^{i\varphi_0(P)} . e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_0}(\alpha x + \beta y)} . dx dy$

et $\underline{A}_T(P) = \int^{+a/2} \int^{+b/2} A_0 e^{i\varphi_0(P)} e^{\frac{-2i\pi}{\lambda_0}(\alpha x + \beta y)} dx dy$

$-a/2 \quad -b/2$

Rem :



Quelle que soit la position de la pupille, on observe la même figure d'interférence à l'écran. (donc indépendant des points et rayons de référence choisis pour le calcul).

Le calcul donne :

$$A_T(P) = \underbrace{A_0 e^{i\varphi_0(P)}}_{\text{indépendant de } x \text{ et } y.} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}\alpha x}\,dx \cdot \int_{-b/2}^{b/2} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}\beta y}\,dy$$

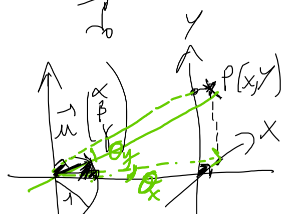
$$= A_0 e^{i\varphi_0(P)} \left[\frac{e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}\alpha x}}{-\frac{2i\pi\alpha}{\lambda_0}}\right]_{-a/2}^{a/2} \cdot \left[\frac{e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}\beta y}}{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}\beta}\right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$= A_0 e^{i\varphi_0(P)} \frac{e^{-\frac{i\pi\alpha a}{\lambda_0}} - e^{+\frac{i\pi\alpha a}{\lambda_0}}}{-2i\left(\frac{\pi\alpha}{\lambda_0}\right)} \times \frac{e^{-\frac{i\pi\beta b}{\lambda_0}} - e^{+\frac{i\pi\beta b}{\lambda_0}}}{-2i\left(\frac{\pi\beta}{\lambda_0}\right)}$$

$$A_T(P) = \underbrace{A_0}_{\text{dim champ } \vec{E}/\text{surface.}} e^{i\varphi_0(P)} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda_0}\right)}{\frac{\pi\alpha}{\lambda_0}} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi\beta b}{\lambda_0}\right)}{\frac{\pi\beta}{\lambda_0}}$$

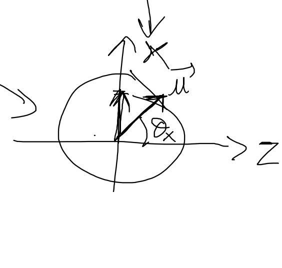
Rappel : $P(X,Y)$ avec $\tan\theta_X = \frac{X}{f'}$

$\tan\theta_Y = \frac{Y}{f'}$



On a $\alpha = \sin\theta_X$

et $\beta = \sin\theta_Y$



Dans le cadre de la théorie scalaire :

θ_x et $\theta_y \ll 1$ donc $X, Y \ll f'$

D'où $\alpha \simeq \frac{X}{f'}$ et $\beta \simeq \frac{Y}{f'}$

On a au final :

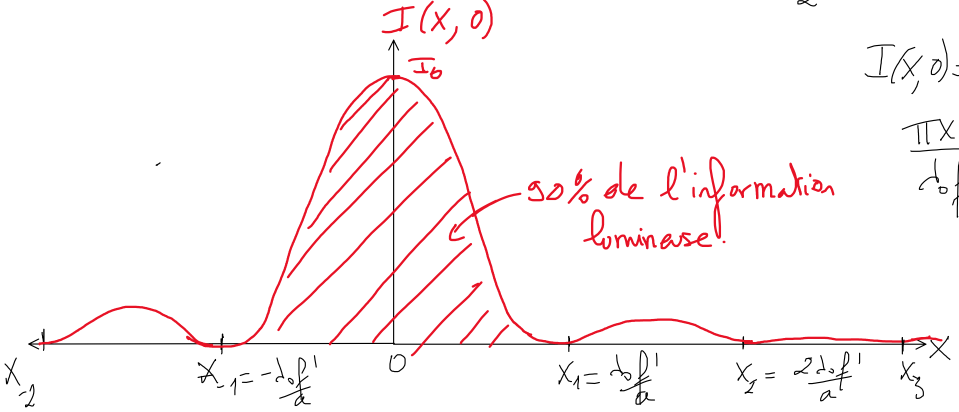
$$\underline{A}_T(X,Y) = A_0 . a . b . e^{i\varphi_0(P)} . \frac{\sin\left(\frac{\pi X a}{\lambda_0 f'}\right)}{\frac{\pi X a}{\lambda_0 f'}} . \frac{\sin\left(\frac{\pi Y b}{\lambda_0 f'}\right)}{\frac{\pi Y b}{\lambda_0 f'}}$$

$$\underline{A}_T(X,Y) = A_0 . a b e^{i\varphi_0(P)} . \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi X a}{\lambda_0 f'}\right) . \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi Y b}{\lambda_0 f'}\right)$$

Et donc $I(X,Y) = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |\underline{A}_T(X,Y)|^2$

$$I(X,Y) = I_0 . \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi X a}{\lambda_0 f'}\right) . \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi Y b}{\lambda_0 f'}\right)$$

avec $I_0 = \frac{\varepsilon_0 c A_0^2 a^2 b^2}{2}$



$I(X,0) = 0$ quand $\frac{\pi X a}{\lambda_0 f'} = p\pi$

donc $\boxed{X_p = p . \frac{\lambda_0 f'}{a}}$

"Ø" de la tâche centrale $= \frac{2\lambda_0 f'}{a}$

(largeur)

Rem : "Analogie" des formules d'interfranges ou de tâche centrale :

Fentes d'Young : $i = \lambda \boxed{\left(\frac{D}{d}\right)}$

Réseau : $p \sin\theta = k\lambda$ ou encore si $\theta \ll 1$, $p \frac{X_k}{f'} = k\lambda$ $(k \in \mathbb{Z})$

soit $X_{k+1} - X_k = \lambda \boxed{\left(\frac{f'}{p}\right)}$

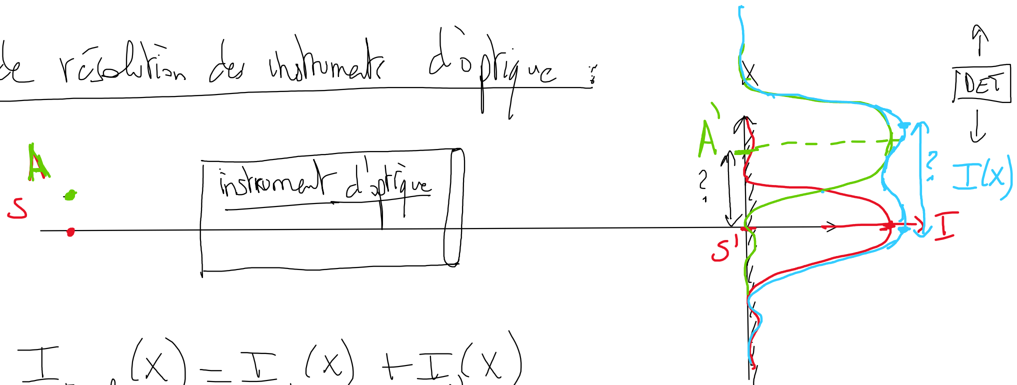
Tâche d'Airy : "Ø" [illegible]

Tache de diffraction : $\varphi = \propto \lambda_0 \boxed{\frac{f}{a}}$ pour une ouverture de largeur a

Plus généralement, pour une ouverture circulaire de diamètre D, $\boxed{r_0 = 1,22 \frac{\lambda f'}{D}}$. Donc le diamètre de la tâche centrale (ou tâche d'Airy) vaut

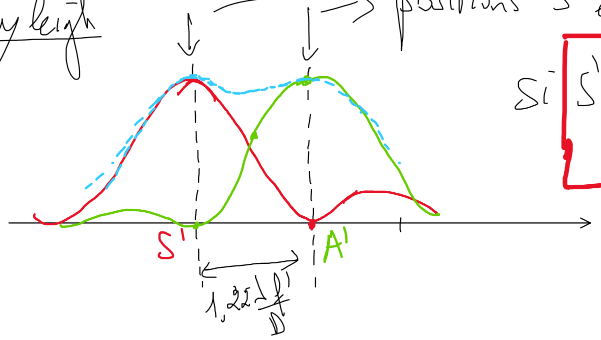
$$\boxed{\phi = 2,44 \frac{\lambda f'}{D}}$$

Pouvoir de résolution des instruments d'optique :



$$I_{Total}(x) = I_{S'}(x) + I_{A'}(x)$$

Critère de Rayleigh



→ positions S' et A' préservées si $\boxed{S'A' > 1,22 \frac{\lambda f'}{D}}$