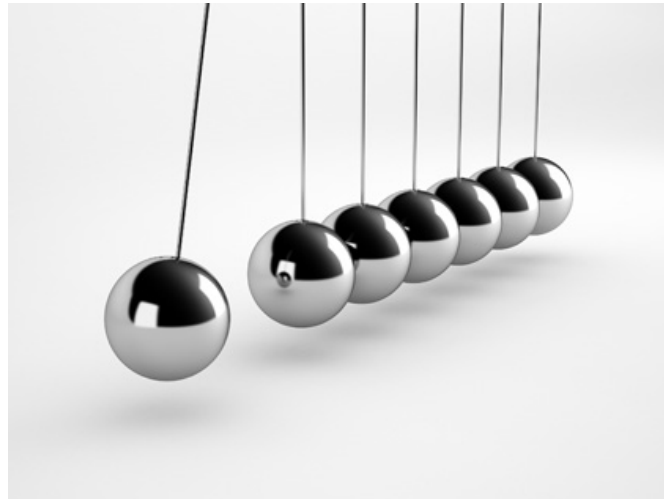


Mécanique du Point



Benjamin Lassagne

Iann Gerber

igerber@insa-toulouse.fr

Département de Génie Physique

Bâtiment FERT

Ouvrages recommandés

- E. Hecht, Physique, ITP DeBoeck Université (1999)
- H. Beson, Physique 1 mécanique, DeBoeck Université (1999)
- J.P. Faroux & J. Renault, Mécanique 1, Dunod , 4^{ième} édition (1996)
- J-P Pérez, Mécanique fondements et applications, Masson, 5^{ième} édition (1997)
- E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Aïm & N. Piccioli, La physique en FAC, Mécanique 1^{ière} et 2nd année, EdiScience-Dunod (2003)
- J. Cipriani & H. Hasmonay, Mécanique et énergie, Librairie Vuibert (1997)
- Alonso & Finn, Physique Générale 1, mécanique et thermodynamique, InterEditions, 2nd édition (1994)
- J. Bergua & P. Goulley, Résoudre un problème de mécanique, Bréal, (1996)
- R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, Les cours de physique de Feynman, Mécanique 1, Dunod (1999)
- E. Klein, L'unité de la physique, PUF (2000)

Comment appréhender le cours de physique du point matériel ?

- Travailler régulièrement ! Se mettre au travail la veille d'un examen, en relisant les annales corrigées est à coup sûr la pire des méthodes de travail à envisager.
- Ne *jamaïs* apprendre une formule « par cœur » et essayer de l'appliquer aux problèmes rencontrés. D'abord, il faut comprendre la démonstration d'une « formule », puis savoir la redémontrer... Ainsi vous l'aurez comprise, donc apprise !
- Anticiper et travailler les exercices de TD *avant* de venir en TD.
- Le cours et les TDs ne suffisent pas pour comprendre la mécanique : empruntez et lisez des livres de la Bib'INSA, cherchez des ressources sur le Web (vidéos explicatives, cours en ligne...)!
- S'entraîner c'est répéter, faire des exercices autres que ceux des TDs est aussi fondamental.

Informations utiles...

- Le cours de physique du point matériel est ponctué par trois examens dont 1 de 45 min, 1 de 1h et un dernier de 2h.
- Le module de mécanique du point comprend 7 cours magistraux/quiz d'1h15, 13 séances de travaux dirigés d'1h15.
- Un photocopié de cours au format pdf est disponible dès le début des cours magistraux sur Moodle, la plateforme pédagogique de l'INSA. Il est indispensable de le lire au fur et à mesure afin de suivre le cours en amphithéâtre et d'être en mesure de participer aux quiz. Il vous sera précisé par mail quelles pages du photocopié vous devrez lire avant d'aller en cours. Vous aurez à disposition en version papier un photocopié des slides de présentation du cours en amphithéâtre afin que vous puissiez prendre des notes.
- Le fascicule de cours étant en perpétuelle évolution. Il est possible que des erreurs ou imprécisions subsistent. N'hésitez pas à en parler avec votre enseignant en cas de doute.
- La correction des annales sera disponible sur Moodle quelques semaines avant les examens.

Les cours magistraux

Les cours magistraux sont une spécificité de l'enseignement supérieur : ils permettent d'introduire une matière, une spécialité à un grand nombre d'étudiants. En général, pendant un cours magistral, l'enseignant aborde les grands concepts d'une matière en suivant un fil conducteur, c'est à dire un cheminement scientifique à l'origine du développement d'une théorie. Les cours magistraux n'ont pas vocation à présenter l'ensemble d'une théorie : ils ne font qu'introduire les concepts de base et les grands principes ! De manière imagée, les cours magistraux ne forment que le « squelette » d'une matière. Ensuite, sur la base des connaissances acquises, les étudiants sont invités à se documenter par eux-mêmes sur des aspects plus spécifiques ou plus appliqués. C'est aussi pendant les cours magistraux que sont démontrés les différents théorèmes nécessaires à la compréhension d'une théorie. Les démonstrations ne sont pas à négliger, elles permettent aux étudiants de bien cerner les limites d'une formule, c'est à dire de bien comprendre son origine (les hypothèses de base à l'origine d'une formule) et ainsi d'évaluer correctement son domaine d'application. En général, pendant un cours magistral, « la technique » ou la « méthode » n'est que très peu enseignée... Ce n'est pas un oubli, c'est tout simplement le rôle des travaux dirigés !

Un cours magistral se place « au-dessus » des détails techniques ou mathématiques : il ne fait que mettre en relation les grands concepts d'une théorie et expliquer leurs portées, leurs conséquences, sans forcément chercher à discuter d'un problème bien précis. C'est la raison pour laquelle certains étudiants sont perturbés par les cours magistraux car ils ont le sentiment de ne rien apprendre, de ne rien retenir... Il n'en est rien : les cours magistraux servent à « préparer l'esprit » pour obtenir une vision d'ensemble d'une matière. Dans l'enseignement supérieur, les cours magistraux permettent aussi de traiter tous les étudiants d'une promotion de manière égale : tous reçoivent le même enseignement dans les mêmes conditions !

Afin de rendre plus dynamique les cours magistraux et d'approprier au mieux les concepts abordés, des quiz sont posés quasiment tous les quarts d'heure. Une question simple ne nécessitant quasiment aucun calcul mais faisant appel à votre esprit de conceptualisation et de réflexion est posée à tout l'amphithéâtre. Vous avez en moyenne 2 minutes de réflexion pour répondre anonymement grâce à un portail internet sur lequel vous vous connectez avec votre smartphone et/ou tablette. Si une majorité d'étudiants a correctement répondu le cours se poursuit. Dans le cas contraire, on vous accorde 2 minutes supplémentaires pour discuter entre vous et répondre de nouveau. En fonction du résultat, une explication détaillée est fournie. L'objectif de ces quiz est de voir si vous avez compris les concepts abordés, de préciser les points développés en cours ou de revenir en arrière le cas échéant. Ils vous permettent aussi d'être actif durant le cours.

Les séances de travaux dirigés

Les travaux dirigés permettent d'approfondir les connaissances étudiées pendant le cours magistral. C'est le moment où la technique sera abordée à travers la résolution d'exercices précis. Les travaux dirigés permettent d'acquérir un « savoir-faire » (à l'instar des cours magistraux qui apportent la connaissance). C'est aussi le moment où certains points de cours (les plus importants) seront éventuellement repris afin d'appuyer un ou des concept(s) essentiel(s). Pendant une séance de travaux dirigés, les étudiants sont supposés être « actifs » : ils doivent chercher par eux-mêmes à résoudre

l'exercice sur la base des connaissances acquises en cours. En général, ce processus est difficile mais essentiel car c'est à travers la confrontation « connaissance/savoir-faire » que l'étudiant prend conscience de ses faiblesses... Heureusement, ces dernières seront « effacées » grâce à la correction de l'enseignant et au partage entre étudiants.

Certains étudiants pensent que seules les séances de travaux dirigés sont utiles. Ce n'est pas vrai. Les séances de travaux dirigés sont nécessaires car elles apportent un nouveau « savoir-faire » aux étudiants et permettent de préparer efficacement les examens. Cependant, elles ne permettent pas d'obtenir une vision globale d'une matière. Or, cette connaissance est primordiale afin de comprendre l'origine de formules utilisées pour la résolution des exercices.

Vous l'aurez compris : les cours magistraux/quiz et les séances de travaux dirigés sont complémentaires, le travail préparatoire en TD est essentiel.

Les examens

Les examens permettent de tester vos connaissances et votre savoir-faire. Les sujets d'examen de physique du point matériel seront toujours originaux (ce ne seront jamais des exercices de TD avec des valeurs numériques modifiées) et ne contiendront *presque* jamais des questions de cours directes. L'originalité des sujets permettent de tester vos connaissances, tandis que les exercices en eux-mêmes permettent de tester votre « savoir-faire ».

Introduction générale

La physique classique permet d'appréhender la plupart des phénomènes de la vie courante à différentes échelles d'observation (macroscopique ou microscopique). Elle permet, par exemple, de prévoir la trajectoire d'une voiture ou le vol d'un avion, de calculer la stabilité et la robustesse des bâtiments et des ponts, ou encore d'expliquer les sons émis par la vibration des cordes d'un violon ou la propagation du son dans une salle. Elle explique aussi la manière avec laquelle évoluent les planètes de notre système solaire comme le mouvement relatif de la terre par rapport au soleil, levant ainsi le voile sur l'origine du jour, de la nuit et des saisons. Elle permet aussi de décrire l'interaction entre un électron et un noyau atomique ou l'action d'un champ électrique sur les électrons dans un matériau donné... Bien sûr, la physique classique n'a pas été construite en un jour : plusieurs siècles et de nombreux scientifiques (N. Copernic, T. Brahé, G. Galilée, R. Descartes, I. Newton, J.L. Lagrange etc....) se sont succédés afin de rendre mature cette théorie.

La physique classique est un des socles de la science moderne et peut être l'une des premières sciences où la démarche scientifique moderne est apparue. C'est-à-dire la confrontation entre une idée, une intuition, une théorie et une expérience spécifique.

La physique classique est à l'origine de nombreux concepts qui sont au cœur des sciences modernes : la quantité de mouvement, le moment cinétique, les interactions entre corps, le travail d'une force, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, les lois de conservations. Toutes ces notions apparaissent dans différents champs des sciences autres que la mécanique, comme la thermodynamique, la chimie etc...

La physique classique dans un cursus ingénieur

Il est important en tant qu'ingénieur de maîtriser les connaissances de bases de la mécanique classique. Comme dit précédemment elle est à l'origine de nombreux concepts utilisés dans tous les champs des sciences modernes. Quel que soit l'orientation que vous choisirez vous serez amenés à utiliser des notions vues en mécanique classique. En voici quelques exemples relatifs aux différents départements de l'INSA.

Génie Mécanique

- Calcul de la cinématique et de la dynamique d'un robot d'une chaîne de construction automobile.
- Calcul de la déformation d'une voiture lors d'un choc.
- ...

Génie Civil

- Calcul de la stabilité d'un pont et de sa résistance vis-vis d'une charge (vent, voitures et camions)
- Calcul de l'acoustique d'une salle notamment pour renforcer l'isolation.
- ...

Génie Physique

- Détermination de la réponse d'un capteur de vitesse à une accélération.
- Détermination du mouvement des électrons (porteurs du courant électrique) au sein de dispositif électronique (transistor MOS, diode électroluminescente...).
- ...

Génie Mathématique et Modélisation

- Modélisation numérique de structures mécaniques.
- Modélisation en mécanique des fluides.
- ...

Génie des Procédés et Environnement et Génie Biochimique

- Détermination de l'écoulement de l'eau dans une centrale de traitements des eaux usées ou l'écoulement de fluides dans un bioréacteur.
- ...

Table des matières

CHAP 1 : Le mouvement, cinématique d'un point matériel.....	11
Introduction	11
I) Analyse vectorielle	12
I.1) Définition basique d'un repère	12
I.2) Généralités sur les vecteurs	12
I.3) Addition et soustraction de vecteurs	13
I.4) Le produit scalaire.....	14
I.5) Le produit vectoriel	15
I.6) Différentielle d'un vecteur	16
I.6.1) Rappel sur la différentielle d'une fonction	16
I.6.2) Différentielle d'un vecteur	16
I.7) Dérivée d'un vecteur par rapport au temps	18
I.8) Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire	18
I.9) Homogénéité des relations vectorielles.....	19
II) Définitions de base.....	20
II.1) Référentiels	20
II.2) Point matériel	20
II.3) Repère d'observation et repère de temps	20
II.4) Base et repère d'espace.....	21
II.5) Trajectoire	22
III) Cinématique, description du mouvement dans différents systèmes de coordonnées.....	22
III.1) Repère cartésien	22
III.1.1) Expression du vecteur position	22
III.1.2) Expression du vecteur déplacement élémentaire	23
III.1.3) Expression du vecteur vitesse	23
III.1.4) Expression du vecteur accélération	24
III.2) Repère cylindrique	24
III.2.1) Expression du vecteur position	24
III.2.2) Expression du vecteur déplacement élémentaire	25
III.2.3) Expression du vecteur vitesse	25
III.2.4) Expression du vecteur accélération	26
III.3) Repère sphérique	26

III.3.1) Expression du vecteur position	27
III.3.2) Expression du vecteur déplacement élémentaire	27
III.3.3) Expression du vecteur vitesse	27
III.3.4) Expression du vecteur accélération	28
III.4) Repère de Frenet	29
III.4.1) Expression de la position	29
III.4.2) Expression du vecteur déplacement élémentaire	29
III.4.3) Expression du vecteur vitesse	30
III.4.4) Expression du vecteur accélération	30
IV) Etude de mouvements élémentaires	31
IV.1) Le mouvement rectiligne	31
IV.1.1) Le mouvement rectiligne uniforme	31
IV.1.2) Le mouvement rectiligne uniformément accéléré (ou décéléré)	32
IV.1.3) Le mouvement rectiligne non uniformément accéléré (ou décéléré)	32
IV.2) Le mouvement circulaire	32
IV.2.1) Le mouvement circulaire uniforme	32
IV.2.2) Le mouvement circulaire uniformément accéléré.....	33
IV.2.3) Le mouvement circulaire non uniformément accéléré	34
IV.3) Autres mouvements	34
CHAP 2 : Dynamique d'un point matériel, les trois lois de Newton.....	35
Introduction	35
I) Quelques définitions	36
1.1) Notion de masse	36
1.2) Quantité de mouvement.....	36
1.3) Notions forces.....	37
II) Quelques forces usuelles	37
2.1) La force de gravitation	37
2.2) La force électrique ou force de Coulomb.....	38
2.3) La force électromagnétique ou force de Lorentz.....	39
2.4) Les forces de contact et de frottements	39
2.4.1) Force de réaction	39
2.4.2) Force de frottement de glissement solide	40
2.4.3) Force de frottement visqueux.....	40
2.5) La force de rappel d'un ressort	41

III) Les lois de la dynamique d'un point matériel	41
III.1) Principe d'inertie (1 ^{ère} Loi de Newton)	41
III.2) Principe Fondamentale de la Dynamique (PFD) (2 ^e Loi de Newton)	42
III.3) PFD sur un ensemble de points matériels et principe d'action réaction (3 ^e Loi de Newton) ...	44
III.4) Théorème du moment cinétique	45
CHAP 3 : Travail et Energie	47
Introduction	47
I) Reformulation du principe fondamentale de la mécanique	47
II) Energie cinétique et travail	48
II.1) Energie cinétique	48
II.2) Travail et puissance d'une force	49
II.3) Théorème de l'énergie cinétique	49
II.4) Signification du travail.....	50
III) Energie potentielle et forces conservatives	51
III.1) Forces non conservatives et forces conservatives	51
III.2) Energie potentielle	52
III.3) Exemple d'énergie potentielle	53
IV) Energie mécanique	54
IV.1) Théorème de l'énergie mécanique.....	54
IV.2) Puit et barrière de potentielle, signification de l'énergie potentielle.....	55
CHAP 4 : Changement de référentiel, composition des mouvements et dynamique dans un référentiel non galiléen.....	57
Introduction	57
I) Composition des vitesses et accélérations.....	57
I.1) Dérivée d'un vecteur dans deux référentiels différents	57
I.2) Composition des vitesses	58
I.3) Composition des accélérations	59
I.4) Référentiel, repère et base	59
II) Dynamique dans un référentiel non galiléen	60
II.1) PFD dans un référentiel non galiléen	60
II.2) Précision sur les référentiels galiléen	61
II.3) Exemple de Référentiel galiléen et non galiléen.....	62
II.4) Théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen	62

CHAP 1 : Le mouvement, cinématique d'un point matériel.

Savoir-faire à acquérir par l'étudiant en fin de chapitre

- Être capable de déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée et savoir calculer un produit scalaire et un produit vectoriel à partir des coordonnées de deux vecteurs.
- Être capable de décrire précisément le mouvement d'un point matériel, c'est-à-dire déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ à tout instant t .
- Être capable de faire cette analyse dans la base cartésienne, dans la base cylindrique et dans la base de Frenet.
- Être capable de déterminer la position d'un point matériel $\overrightarrow{OM}(t)$ à partir de son vecteur accélération $\vec{a}(t)$.

Introduction

L'objectif de la mécanique du point est d'expliquer et de prédire le mouvement d'un objet à partir des forces qui lui sont appliquées. Cependant, avant de comprendre la relation précise qui unit ces deux notions, il est primordial de pouvoir formaliser la notion de mouvement d'un corps. Nous avons tous une notion intuitive du mouvement, en effet la notion d'espace et de déplacement est une capacité qu'on acquiert dès notre plus jeune âge et que l'on appréhende quotidiennement lors de nos déplacements pédestres, à vélo ou en voiture. Il est donc plus aisé de formaliser le mouvement avant d'aborder la notion plus complexe de force.

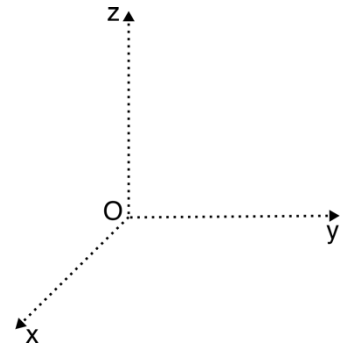
Les trois paramètres décrivant le mouvement d'un objet sont sa position à un instant t donné, sa vitesse et son accélération. Les deux premiers paramètres sont assez faciles à appréhender, notamment la vitesse qui est une notion que l'on utilise tous les jours. Tout le monde a conscience que la vitesse d'un objet est caractérisée par son amplitude, nous allons plus ou moins vite, et aussi sa direction et son sens, on se déplace dans un espace géométrique tridimensionnel. Ainsi pour formaliser la notion du mouvement, l'outil mathématique le plus adapté se trouve être le vecteur qui spécifie à la fois une amplitude et une direction.

L'analyse du mouvement indépendamment de sa cause se nomme dans le jargon scientifique la cinématique. Dans ce chapitre, nous aborderons les notions de référentiels, nous présenterons les éléments essentiels de l'analyse vectorielle puis nous nous attacherons à formaliser la position, la vitesse et l'accélération d'un corps sous forme vectorielle.

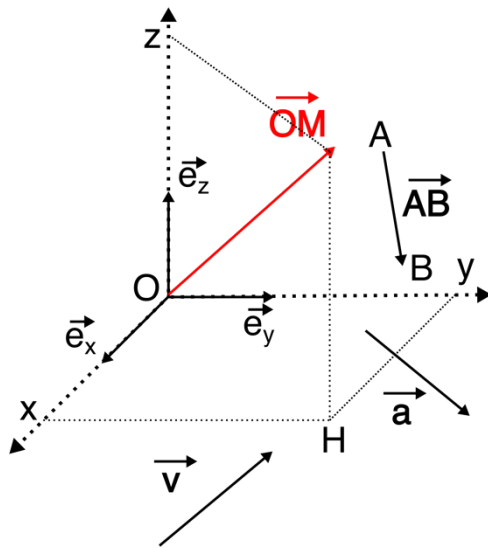
I) Analyse vectorielle

I.1) Définition basique d'un repère

On rappelle que pour localiser un point dans l'espace tridimensionnel il faut utiliser trois axes et une origine O . L'ensemble constitue le repère. Les trois axes généralement appelés x , y et z sont matérialisés par trois droites orthogonales entre-elles.



I.2) Généralités sur les vecteurs



D'une manière générale, les vecteurs sont des objets mathématiques représentés graphiquement par des segments de droite munis d'une flèche ($\vec{v}$, $\vec{a}$). Cette représentation permet de définir les trois caractéristiques du vecteur :

- sa **norme** (liée à la taille du segment)
- sa **direction**
- son **sens**.

On peut aussi définir un vecteur en traçant la droite reliant deux points de l'espace ($\overrightarrow{AB}$).

Ainsi, les vecteurs sont des objets mathématiques particulièrement adaptés à la physique du point matériel. En effet, un point matériel M est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, O étant l'origine du repère. $\overrightarrow{OM}(t)$ est défini par ses composantes, susceptibles de dépendre du temps, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ dans le repère d'espace (O, x, y, z) . De ce fait, les coordonnées du vecteur position constituent les équations horaires du mouvement, permettant de définir sa trajectoire. Mais les vecteurs permettent aussi de définir d'autres notions très importantes en physique du point matériel telles que la vitesse, l'accélération, le moment cinétique, les forces etc... Il faut donc être vigilant lorsqu'on compare deux vecteurs entre eux. Dans la figure ci-contre, dire que le vecteur accélération $\vec{a}$ est plus petit que le vecteur vitesse $\vec{v}$ n'a strictement aucun sens ! Ces deux notions ne pouvant pas être comparées l'une à l'autre, la vitesse ayant pour dimension LT^{-1} donc a pour unité le $m.s^{-1}$ alors que l'accélération a pour dimension LT^{-2} et donc s'exprime en $m.s^{-2}$.

Maintenant que nous comprenons ce qu'est un vecteur, nous pouvons définir rigoureusement un repère. Pour cela on utilise trois vecteurs unitaires (d'amplitude égale à 1) orthogonaux $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ permettant de définir la direction et le sens des trois axes x , y , z . Ainsi un repère est défini par une origine O et une base orthonormée $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, il est appelé **repère cartésien**.

Ainsi, l'écriture mathématique d'un vecteur quelconque $\vec{v}$ dans le repère cartésien se note :

$$\vec{v} = v_x(x, y, z, t) \vec{e}_x + v_y(x, y, z, t) \vec{e}_y + v_z(x, y, z, t) \vec{e}_z \text{ où } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z, t) \\ v_y(x, y, z, t) \\ v_z(x, y, z, t) \end{pmatrix}$$

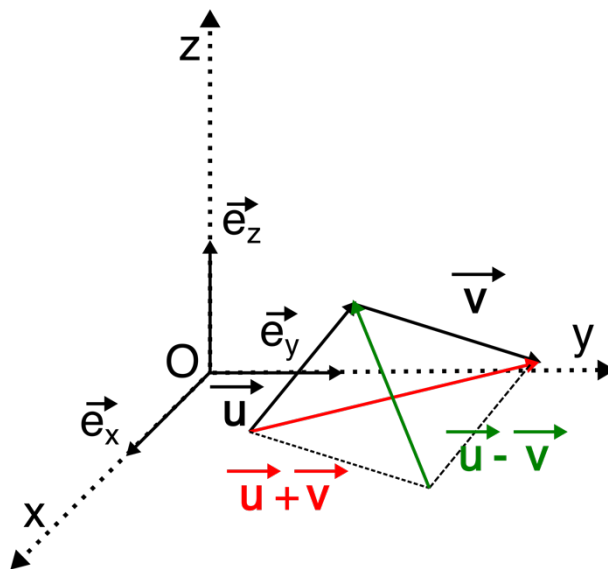
avec v_x , v_y et v_z sont les coordonnées/composantes du vecteur.

L'amplitude absolue du vecteur ou encore norme notée $\|\vec{v}\|$ se calcule de la façon suivante :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

C'est une grandeur positive. Notez que, mathématiquement, un vecteur n'a pas de « point d'accroche » dans l'espace : il s'exprime toujours en fonction des vecteurs de base mais ne fait jamais intervenir le point origine d'un repère ! En physique du point matériel, le point d'accroche des vecteurs n'est pas nécessaire, mais il peut parfois favoriser la compréhension de certains problèmes (Exemple : point d'application des forces).

I.3) Addition et soustraction de vecteurs



Les vecteurs peuvent s'additionner et se soustraire. Graphiquement, l'addition de deux vecteurs produit un vecteur correspondant à la grande diagonale du parallélogramme formé par les deux vecteurs à additionner (lorsque ces derniers ont le même « point d'accroche »). Au contraire, la soustraction de deux vecteurs forme la petite diagonale du parallélogramme. L'addition et la soustraction de deux vecteurs peuvent aussi être réalisées à partir des coordonnées des vecteurs. Soit

$$\vec{u} = a \vec{e}_x + b \vec{e}_y + c \vec{e}_z \text{ et } \vec{v} = a' \vec{e}_x + b' \vec{e}_y + c' \vec{e}_z$$

On a alors :

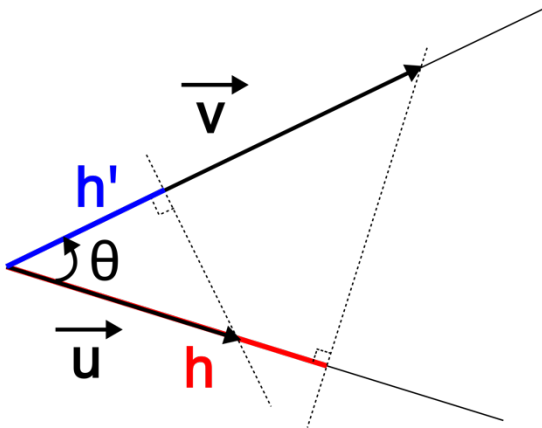
$$\vec{u} + \vec{v} = (a + a') \vec{e}_x + (b + b') \vec{e}_y + (c + c') \vec{e}_z$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (a - a') \vec{e}_x + (b - b') \vec{e}_y + (c - c') \vec{e}_z$$

Ainsi on peut définir un vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir des coordonnées des points initial et final.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

I.4) Le produit scalaire



Le produit scalaire est une opération mathématique construite à partir de deux **vecteurs**, et produisant un **scalaire**. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note :

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Graphiquement, le produit scalaire correspond au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ avec la projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$, ou inversement. Il vient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) = \|\vec{u}\| h = \|\vec{v}\| h',$$

θ est l'angle pris dans le sens trigonométrique entre les deux vecteurs.

Le produit scalaire est :

- commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- distributif : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Le produit scalaire peut aussi être calculé à partir des coordonnées des vecteurs :

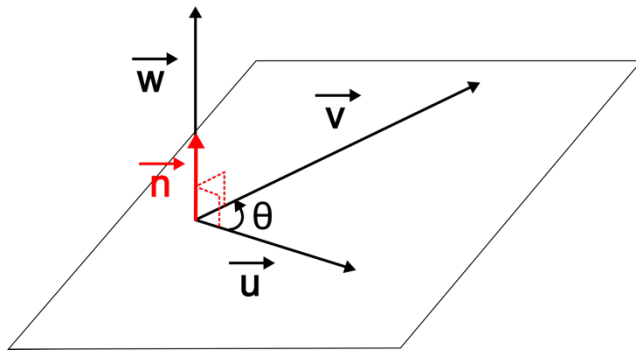
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf$$

Le produit scalaire permet de déterminer aisément les composantes d'un vecteur $\vec{u}$ dans n'importe quelle base orthonormée. En effet, nous pouvons écrire :

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x + (\vec{u} \cdot \vec{e}_y) \vec{e}_y + (\vec{u} \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z.$$

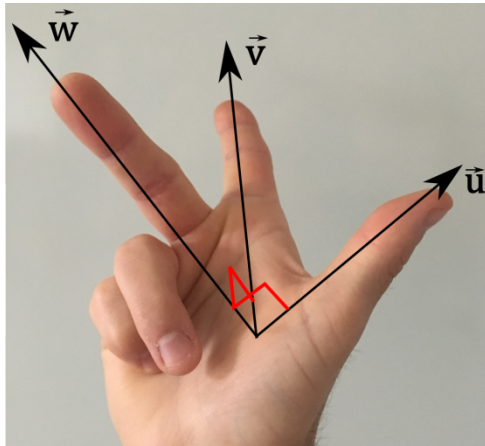
I.5) Le produit vectoriel



Le produit vectoriel est une opération mathématique construite à partir de deux **vecteurs**, et produisant un autre **vecteur**. Le vecteur résultant est orthogonal au plan formé par les vecteurs initiaux. Le sens du vecteur résultant s'obtient à partir de « la règle de la main droite ». On a :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\theta) \vec{n},$$

avec $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal au plan défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (cf. figure précédente). La figure ci-après explicite la règle de la main droite. Le pouce correspond au vecteur 1, $\vec{u}$, l'index au vecteur 2, $\vec{v}$, et le résultat $\vec{w}$ est donné par le majeur.



Le produit vectoriel est :

- anti-commutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

- distributif : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Le produit vectoriel peut aussi être calculé à partir des coordonnées des vecteurs :

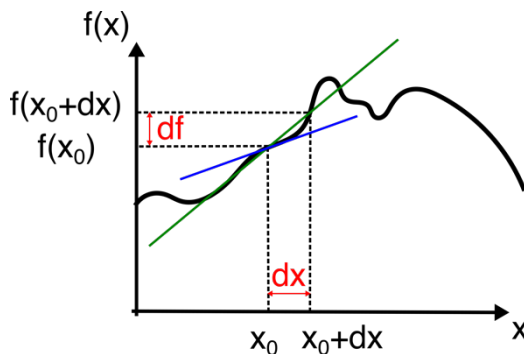
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

Autant on comprend facilement l'utilité du produit scalaire, autant il est plus difficile d'appréhender la signification du produit vectoriel. On verra par la suite qu'il nous permet de définir certaines forces, notamment la force électromagnétique.

I.6) Différentielle d'un vecteur

I.6.1) Rappel sur la différentielle d'une fonction



Soit une fonction à une variable $f(x)$, la dérivée $f'(x)$ est définie comme le **taux de variation** de la fonction $f(x)$. En d'autres termes, c'est la pente de la fonction en un point donné x_0 . On la définit comme suit :

$$f'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

La différentielle df de la fonction f est simplement la **variation** (et non le taux de variation), encore appelé l'accroissement, de f entre x et dx soit :

$$df = f(x + dx) - f(x).$$

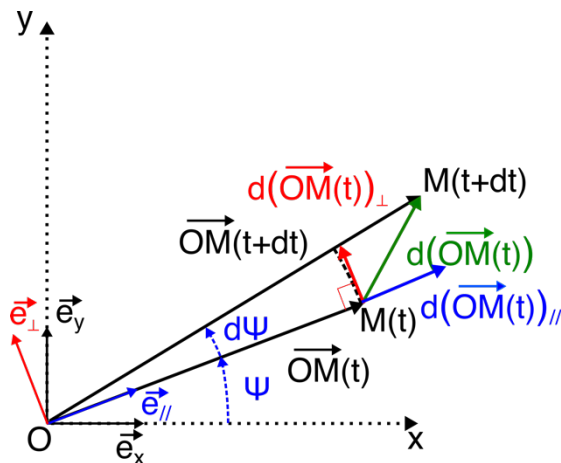
df et $f'(x)$ sont reliés par l'expression :

$$df = f'(x) dx.$$

Par cette définition nous pouvons facilement déterminer la différentielle d'un produit de fonction :

$$d(fg) = (fg)' dx = f' g dx + f g' dx = g f' dx + f g' dx = g df + f dg$$

I.6.2) Différentielle d'un vecteur



Considérons un vecteur $\overrightarrow{OM}$ susceptible d'évoluer dans le temps, à la fois en direction et en norme. Entre un instant t et un instant $t+dt$ (avec dt une variation infinitésimale du temps) le vecteur a varié d'une quantité $d(\overrightarrow{OM}(t))$ que l'on appelle La différentielle du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Ainsi on peut écrire :

$$d(\overrightarrow{OM}(t)) = \overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t).$$

La figure ci-dessus représente le vecteur $\overrightarrow{OM}(t + dt)$, $\overrightarrow{OM}(t)$ et $d(\overrightarrow{OM}(t))$.

Plutôt que d'utiliser les vecteurs de base « conventionnels » $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, nous allons exprimer l'ensemble des vecteurs dans la base $\vec{e}_{//}$ et $\vec{e}_{\perp}$. Le vecteur $\vec{e}_{//}$ est parallèle à $\overrightarrow{OM}$ à l'instant t de sorte que $\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\| \vec{e}_{//}$. De la même manière, le vecteur $\vec{e}_{\perp}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ à l'instant t .

Ici nous considérons le cas général dans lequel le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pu, pendant le temps dt , à la fois s'allonger et tourner d'un angle infinitésimal $d\psi$ (avec $d\psi = \psi(t + dt) - \psi(t)$). Nous décomposons le vecteur $d(\overrightarrow{OM}(t))$ de la manière suivante (cf. figure) :

$$d(\overrightarrow{OM}(t)) = d(\overrightarrow{OM}(t))_{//} + d(\overrightarrow{OM}(t))_{\perp}.$$

Dans la limite où $d\psi$ tend vers 0, $d(\overrightarrow{OM}(t))_{//}$ va s'aligner avec $\vec{e}_{//}$. Dans cette situation, $\|d(\overrightarrow{OM}(t))_{//}\|$ correspond simplement à l'allongement du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$$\text{Ainsi } \|d(\overrightarrow{OM}(t))_{//}\| = d\|\overrightarrow{OM}(t)\|.$$

Par construction, le vecteur $d(\overrightarrow{OM}(t))_{\perp}$ va s'aligner avec le vecteur unitaire $\vec{e}_{\perp}$ (toujours dans la limite où $d\psi$ tend vers 0). En utilisant le triangle rectangle, nous déduisons que sa norme vaut :

$$\|d(\overrightarrow{OM}(t))_{\perp}\| = \|\overrightarrow{OM}(t)\| \tan(d\psi) \approx \|\overrightarrow{OM}(t)\| d\psi.$$

Ainsi, la différentielle du vecteur $d(\overrightarrow{OM}(t))$ s'écrit de la manière suivante :

$$d(\overrightarrow{OM}(t)) = d\|\overrightarrow{OM}(t)\| \vec{e}_{//} + \|\overrightarrow{OM}(t)\| d\psi \vec{e}_{\perp}. \quad (1.1)$$

Remarque : dans cette expression, le symbole « d » fait référence à la différentielle de quantités scalaires $\|\overrightarrow{OM}(t)\|$ et ψ plutôt que vectorielles.

La différentielle d'un vecteur peut aussi être calculée directement à partir de son expression analytique. Considérons l'exemple suivant :

$$\overrightarrow{OM}(t) = A(t) \vec{e}_x + B(t) \vec{e}_y,$$

ce vecteur est exprimé dans la base des vecteurs unitaires $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ qui sont « **fixes** » dans le repère d'observation. Les coordonnées $A(t)$ et $B(t)$ dépendent du temps avec, par exemple $A(t) = t^2$, et $B(t) = 4t$. La différentielle n'étant qu'une « simple » opération de soustraction vectorielle, elle est distributive de sorte que :

$$\begin{aligned} d(\overrightarrow{OM}(t)) &= d(A(t) \vec{e}_x) + d(B(t) \vec{e}_y) \\ &= d(A(t)) \vec{e}_x + d(B(t)) \vec{e}_y + A(t) d\vec{e}_x + B(t) d\vec{e}_y. \end{aligned}$$

Or les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont fixes, on a donc :

$$\begin{aligned} d(\overrightarrow{OM})(t) &= d(A(t)) \vec{e}_x + d(B(t)) \vec{e}_y \\ &= A'(t) dt \vec{e}_x + B'(t) dt \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot t \cdot dt \vec{e}_x + 4 dt \vec{e}_y$$

I.7) Dérivée d'un vecteur par rapport au temps

La dérivée d'un vecteur par rapport au temps s'obtient simplement en divisant sa différentielle par l'élément infinitésimal dt . Ainsi :

$$\frac{d(\overrightarrow{OM}(t))}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{\overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right) = \frac{d\|\overrightarrow{OM}(t)\|}{dt} \vec{e}_{//} + \|\overrightarrow{OM}(t)\| \frac{d\psi}{dt} \vec{e}_{\perp}.$$

La dérivation d'un vecteur peut aussi être réalisée directement à partir de son expression analytique. En reprenant l'exemple de la section précédente, il vient :

$$\frac{d(\overrightarrow{OM}(t))}{dt} = \frac{d}{dt}(A(t) \vec{e}_x) + \frac{d}{dt}(B(t) \vec{e}_y) = \frac{d}{dt}(A(t)) \vec{e}_x + \frac{d}{dt}(B(t)) \vec{e}_y = 2t \vec{e}_x + 4 \vec{e}_y.$$

Là encore, l'opération de dérivée par rapport au temps est distributive, et les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ ont été « sortis » de la dérivée car ils sont considérés comme fixes dans le repère d'étude.

I.8) Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Nous allons à présent nous intéresser au cas particulier des vecteurs unitaires. Par définition, la norme d'un vecteur unitaire $\vec{e}$ est constante et vaut $\|\vec{e}\| = 1$. Cependant un vecteur unitaire n'est pas forcément « fixe » dans un repère d'étude : sa direction peut changer au cours du temps de sorte que sa différentielle et sa dérivée soient non-nulles. Pour évaluer la différentielle d'un vecteur unitaire, nous appliquons la relation (1.1) au vecteur $\vec{e}$ avec $\vec{e} = 1 \cdot \vec{e}_{//}$, $\|\vec{e}\| = 1$ et $d\|\vec{e}\| = 0$

$$d(\vec{e}) = d\|\vec{e}\| \vec{e}_{//} + \|\vec{e}\| d\psi \vec{e}_{\perp} = d\psi \vec{e}_{\perp}.$$

Comme précédemment, la dérivée s'obtient en divisant l'expression ci-dessus par dt , soit :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \vec{e}_{\perp}. \quad (1.2)$$

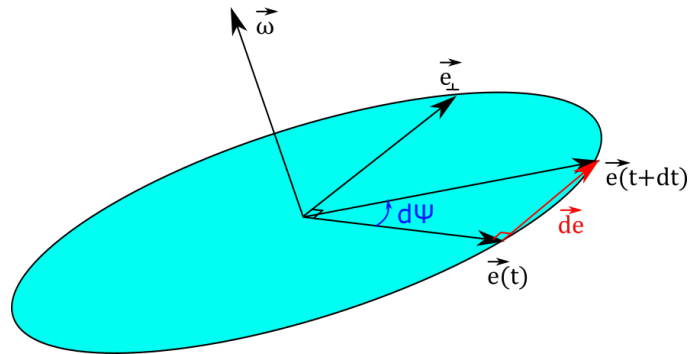
Nous obtenons un résultat important : la différentielle (ou la dérivée) d'un vecteur unitaire est un vecteur perpendiculaire à celui-ci. Sa norme n'est cependant pas unitaire et vaut $d\psi$ dans le cas de la différentielle et $\frac{d\psi}{dt}$ dans le cas de la dérivée.

Une autre démonstration peut être proposée pour démontrer que la dérivée d'un vecteur unitaire est toujours perpendiculaire à ce dernier. Si $\vec{e}$ est un vecteur unitaire, alors $\|\vec{e}\| = 1$. En calculant le produit scalaire de $\vec{e}$ par lui-même, on obtient naturellement $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$. En prenant la dérivée par rapport au temps à droite et à gauche du signe "=" de cette équation, il vient :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} \cdot \vec{e} + \vec{e} \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} = 2\vec{e} \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} = 0.$$

Le produit scalaire entre $\vec{e}$ et son vecteur dérivé $\frac{d\vec{e}}{dt}$ est nul, donc $\frac{d\vec{e}}{dt}$ est bien perpendiculaire à $\vec{e}$!

Reprenons l'expression (1.2), on appelle ω le scalaire $\frac{d\psi}{dt}$. Il représente la vitesse angulaire à laquelle tourne le vecteur $\vec{e}$. Son unité est le rad.s^{-1} . A partir du scalaire ω , nous construisons un vecteur $\vec{\omega}$ définissant la rotation du vecteur $\vec{e}$. $\vec{\omega}$ est défini de la manière suivante :



- $\vec{\omega}$ est toujours perpendiculaire au plan de la rotation du vecteur $\vec{e}$. (le plan coloré en bleu clair sur le schéma ci-dessus).

- Sa norme est proportionnelle à la vitesse angulaire, soit $\|\vec{\omega}\| = \omega = \frac{d\psi}{dt}$.

- Le sens du vecteur $\vec{\omega}$ dépend du sens de rotation du vecteur $\vec{e}$ selon la règle de la main droite :

$\vec{e}(t) \Leftrightarrow$ pouce, $\vec{e}(t + dt) \Leftrightarrow$ index donc $\omega \Leftrightarrow$ majeur.

Grâce au vecteur $\vec{\omega}$, nous pouvons maintenant proposer une définition alternative à la dérivée d'un vecteur unitaire à travers la relation :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}. \quad (1.3)$$

L'opération « produit vectoriel par $\vec{\omega}$ » permet de passer du vecteur $\vec{e}_{//}$ au vecteur $\vec{e}_{\perp}$ si la direction et le sens du vecteur $\vec{\omega}$ sont correctement définis grâce aux indications ci-dessus. La norme du vecteur $\vec{\omega}$ est transmise au vecteur $\frac{d\vec{e}}{dt}$ à travers l'opération du produit vectoriel.

I.9) Homogénéité des relations vectorielles

Les objets mathématiques de base de la physique du point matériel (position, vitesse, accélération, forces, moments etc...) sont quasiment tous vectoriels. Vous allez donc devoir vous habituer au formalisme vectoriel pour effectuer les différents calculs demandés. Aussi, chaque fois que vous obtiendrez un résultat, une relation, une équation, **posez-vous toujours la question de savoir si votre résultat est « homogène »**. Une quantité vectorielle doit être égale à un vecteur, une quantité scalaire doit être égale à un scalaire !

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + \frac{v^2}{R} \vec{e}_N \text{ CORRECT}$$

$$\|\vec{a}\| = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + \frac{v^2}{R} \vec{e}_N \text{ INCORRECT}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + \frac{v^2}{R} \text{ INCORRECT}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + \frac{v^2}{R} \vec{e}_N \text{ INCORRECT}$$

II) Définitions de base

II.1) Référentiels

L'analyse du mouvement dépend directement de la personne qui observe le mouvement, on le nomme l'**observateur**. C'est un être qui a conscience de l'écoulement du temps, fléché du passé vers le futur et qui perçoit l'existence d'objets indépendamment de lui-même, localisés dans l'espace et pouvant se déplacer au cours du temps. Deux observateurs différents peuvent percevoir le mouvement différemment. Considérons un exemple simple où un premier observateur est debout dans un bus roulant à vitesse constante. Il laisse tomber son journal au sol. Le mouvement perçu par ce premier observateur est un mouvement de chute libre vertical. Un deuxième observateur situé sur le trottoir observe la scène, pour ce dernier le journal ne possède pas un mouvement vertical mais un mouvement de chute libre de type parabolique. Ainsi on dit que le mouvement est **relatif** à l'observateur.

Pour décrire le mouvement d'un objet il faut donc définir un **référentiel d'observation ou solide de référence** où l'observateur est fixe. Dans l'exemple précédent, le référentiel d'observation du premier observateur est lié au bus, pour le second observateur le référentiel est lié à la Terre car l'observateur reste sans bouger sur le trottoir.

Bien qu'il existe une infinité de référentiels, certains sont particuliers et sont appelés référentiels galiléens. Ces derniers sont des référentiels animés d'un mouvement de translation uniforme par rapport au référentiel de Copernic. Le référentiel de Copernic est le référentiel dont l'origine est au barycentre du système solaire et dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines dites étoiles fixes. Il est difficile de saisir la notion de référentiel galiléen avant d'introduire les concepts de changement de référentiel ainsi que l'équation fondamentale de la dynamique. En pratique, un référentiel sera considéré comme galiléen si, dans ce dernier et pour un temps d'observation donné, le mouvement d'un objet n'étant soumis à aucune force extérieure est nul ou rectiligne et de vitesse constante.

II.2) Point matériel

Il s'agit d'un point géométrique associé à un système de un ou plusieurs corps dont la position est parfaitement déterminée par la donnée de trois coordonnées (dans l'espace à trois dimensions) et d'un paramètre temporel. En pratique on « modélisera » un système de corps quelconques par son centre de gravité (un point unique) auquel est associée toute la masse des corps en question. Bien souvent, le système n'est composé que d'un seul corps, de sorte que le centre de gravité du système soit confondu avec celui de ce dernier.

II.3) Repère d'observation et repère de temps

Afin de préciser la notion de référentiel et de pouvoir décrire précisément la position d'un point matériel par rapport au référentiel, il est nécessaire de définir un **repère d'observation** dans lequel nous pouvons facilement déterminer la position d'un objet. Le plus évident et naturel est de prendre les coordonnées cartésiennes. Ainsi le repère d'observation se caractérise par une origine O

fixe dans le référentiel choisi (en général l'observateur) ainsi que par une base de référence orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel choisi. Un référentiel peut être associé à plusieurs repères d'observation en fonction de l'origine choisie et de la direction des axes de références. Par contre un repère d'observation est associé à un seul référentiel, celui qui est fixe par rapport au repère.

Il ne suffit pas de préciser la position d'un objet pour décrire son mouvement mais il faut aussi préciser le temps auquel est relevée la position. Ceci introduit la nécessité de disposer d'un **repère de temps**. La notion de temps est encore une fois un concept intuitif puisque nous ressentons l'écoulement du temps au travers les actions que l'on mène quotidiennement, aller au travail, prendre le temps de manger, regarder l'aiguille d'une montre trottée... Le repère de temps est constitué d'une origine, généralement l'instant où l'on connaît précisément la position et la vitesse d'un objet. A partir de cet instant initial, le temps ne peut que s'écouler dans un sens, du passé vers le futur, c'est-à-dire que le paramètre temps ne peut que croître, c'est ce qu'on appelle l'irréversibilité du temps. Notion que l'on comprend aisément quand on se voit vieillir jour après jour où lorsqu'on voit un objet se casser sur le sol.

Contrairement au repère d'espace, le temps est un paramètre absolu, en tout cas dans le cadre de la mécanique classique initiée par Isaac Newton. C'est-à-dire que tous les observateurs voient le temps s'écouler de la même manière quel que soit l'endroit de l'espace où ils se trouvent et quelle que soit la vitesse relative que les observateurs ont entre eux. Cette notion de temps absolu est en fait une approximation. Albert Einstein a montré grâce à la théorie de la relativité restreinte (puis générale) que le temps et l'espace sont intimement liés. On ne parle plus de repère d'espace et de repère de temps mais d'espace-temps. Selon la relativité restreinte, l'écoulement du temps est différent selon la vitesse à laquelle on se déplace. Plus on se déplace vite, plus le temps se dilate. Ce concept est directement relié au fait que la vitesse d'un objet ne peut excéder la vitesse de la lumière c . Cependant en mécanique classique où les vitesses n'excèdent pas $c/10$ cette dilatation temporelle est négligeable.

Finalement nous utiliserons la notation suivante pour définir un référentiel et son repère d'observation :

$$\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t).$$

II.4) Base et repère d'espace

Lorsque nous avons évoqué le repère d'observation précédemment, nous lui avons naturellement associé une base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Pour rappel un point M en coordonnées cartésiennes est défini par ses coordonnées (x, y, z) . Nous pouvons écrire $\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$.

Les coordonnées cartésiennes ne sont pas le seul système de coordonnées utilisables. Il existe d'autres systèmes de coordonnées tel que les coordonnées cylindriques, sphériques ou encore la base de Frenet. Dans ce cours nous nous concentrerons sur les coordonnées cylindriques et la base de Frenet. A la différence des coordonnées cartésiennes, les vecteurs de base orthonormés définissant les coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ou encore la base de Frenet $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_b)$ ne sont pas fixes mais liés au point M . Nous précisons comment utiliser ces coordonnées dans la suite. Ainsi lorsqu'on souhaite définir un référentiel avec un système de coordonnées possédant une base non fixe dans le référentiel, nous utiliserons le terme de **repère d'espace** et non repère d'observation.

On peut se demander quel intérêt nous aurions à utiliser un système de coordonnées autre que les coordonnées cartésiennes et qui de plus ne possède pas un système d'axes fixes. La raison est que la nature est profondément symétrique (principe de Curie). Ainsi lorsque les causes du mouvement, en l'occurrence les forces possèdent une certaine symétrie (cylindrique ou sphérique par exemple), le mouvement ne peut que posséder la même symétrie. Ainsi il est plus judicieux d'utiliser un système de coordonnées adapté aux symétries du système. La description du mouvement dans ces systèmes de coordonnées est nettement simplifiée et l'écriture moins lourde. Vous en serez convaincus dans la suite du chapitre. Évidemment nous pourrons toujours utiliser les coordonnées cartésiennes bien que les équations et les expressions de la vitesse ou de l'accélération peuvent devenir vite très compliquées avec ce système de coordonnées.

II.5) Trajectoire

La trajectoire d'un point matériel constitue l'ensemble des positions de l'espace que ce dernier occupe au cours du temps. Il s'agit d'une ou plusieurs équations qui relie(nt) entre elles les différentes coordonnées d'un repère (par exemple $y = x^2 + 3$; $z = 0$, dans le système de coordonnées cartésiennes). Le paramètre temps t n'apparaît pas dans les équations de la trajectoire. Cependant, une trajectoire peut être parfaitement définie lorsque l'on connaît l'évolution temporelle de toutes les coordonnées caractérisant la position d'un point matériel. Nous parlons dans ce cas « d'équations horaires » dans lesquelles le paramètre t peut apparaître explicitement. Autrement dit, à chaque « valeur » du temps t , il est possible d'associer une position du point M dans l'espace, repérée par ses coordonnées.

III) Cinématique, description du mouvement dans différents systèmes de coordonnées

III.1) Repère cartésien

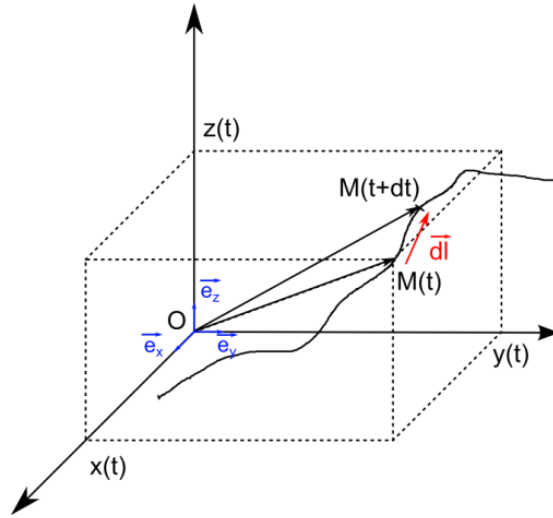
Comme nous l'avons déjà vu le repère cartésien est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires « fixes » dans le référentiel choisi, on utilise donc le terme repère d'observation. On dit aussi que les vecteurs de base sont « liés » au référentiel. En d'autres termes, cela signifie que ni la **norme**, ni la **direction**, ni le **sens** de ces vecteurs unitaires ne changent au cours du temps. Les trois vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ déterminent les trois directions usuelles de l'espace $\{(Ox), (Oy), (Oz)\}$. La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O par ses coordonnées (x, y, z) . Le repère et indifféremment le référentiel seront notés $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$.

Remarque : nous pouvons très bien utiliser un repère d'espace cartésien tel que les vecteurs de bases soient mobiles dans le référentiel. Nous aborderons en détail ce problème dans le chapitre sur le changement de référentiel.

III.1.1) Expression du vecteur position

En coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit simplement dans le repère d'observation $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$:

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z. \quad (1.4)$$



III.1.2) Expression du vecteur déplacement élémentaire

Le vecteur « déplacement élémentaire » $\overrightarrow{dl}$ est obtenu logiquement en soustrayant la position du point M au temps $t+dt$, à celle du point M au temps t .

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)$$

Lorsqu'on considère un déplacement élémentaire tel que $dt \rightarrow 0$, déterminer $\overrightarrow{dl}$ revient mathématiquement à *différencier* l'expression de $\overrightarrow{OM}$. Il vient :

$$\overrightarrow{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = dx \vec{e}_x + x d\vec{e}_x + dy \vec{e}_y + y d\vec{e}_y + dz \vec{e}_z + z d\vec{e}_z.$$

Dans le repère d'observation cartésien, les vecteurs de base sont « fixes » par rapport au référentiel, ils n'évoluent pas au cours du temps $d\vec{e}_x = 0, d\vec{e}_y = 0, d\vec{e}_z = 0$. Finalement, on obtient :

$$\overrightarrow{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z. \quad (1.5)$$

III.1.3) Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ se déduit du vecteur « déplacement élémentaire » de la manière suivante :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

son unité dans le système international est le m.s^{-1} .

III.1.4) Expression du vecteur accélération

Intuitivement on sait que l'accélération représente le taux de variation de la vitesse dans le temps. Cependant le vecteur accélération donne plus d'informations que la variation scalaire de la vitesse. Il renseigne aussi le changement de direction du mouvement. C'est-à-dire que la vitesse peut garder en norme une valeur constante mais changer de direction. Son accélération est alors non nulle.

Le vecteur accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est donné par :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d^2\vec{l}}{dt^2}.$$

Comme les vecteurs de base sont "fixes" par rapport au référentiel choisi nous pouvons écrire :

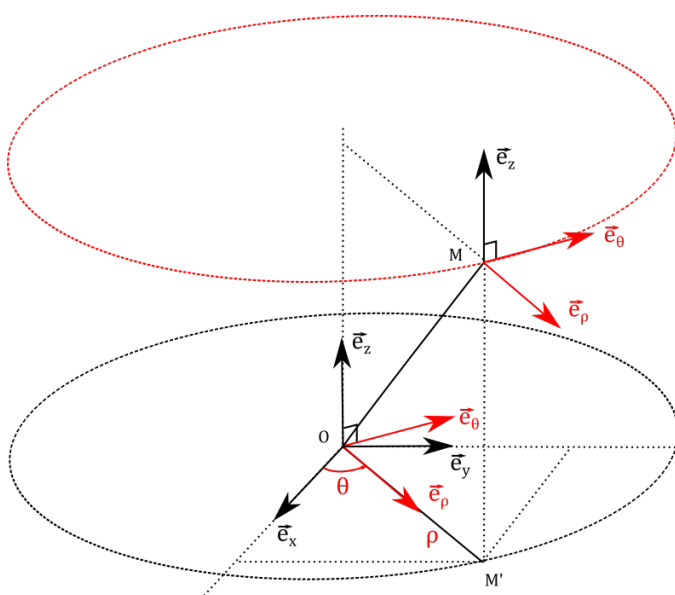
$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d^2\vec{l}}{dt^2} = \frac{d^2(\vec{OM})}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

son unité dans le système international est le m.s^{-2} .

III.2) Repère cylindrique

Le repère cylindrique est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$. $\vec{e}_z$ est « fixe » dans le référentiel choisi, il est identique au $\vec{e}_z$ des coordonnées cartésiennes, tandis que les deux autres $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ sont mobiles (on parle alors de repère d'espace). Ils sont liés au point M en mouvement. Ce système de coordonnées est très adapté à des mouvements de rotation autour d'un axe (circulaire, elliptique, hélicoïdale etc...)

III.2.1) Expression du vecteur position



La position de M dans ce repère est définie à partir du point origine O par ses coordonnées (ρ, θ, z) . On définit M' comme la projection de M dans le plan (x, O, y) . Ainsi ρ correspond à la norme du vecteur $\vec{OM'}$, $\rho = \|\vec{OM'}\|$ et θ est l'angle défini par la droite (OM') et l'axe Ox (cf. figure ci-dessous). D'après la figure ci-contre, le vecteur position s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z, \quad (1.8)$$

avec $\vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM'}}{\rho}$.

$\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ sont contenus dans le plan (x, O, y) . Dans ce système de coordonnées, comme les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ sont liés au point M il suffit d'utiliser uniquement $\vec{e}_\rho$ pour exprimer les coordonnées du point M . $\vec{e}_\theta$ est implicitement contenu dans l'expression (1.8). En effet il sert à définir la direction du vecteur $\vec{e}_\rho$.

Si on « attache » au référentiel un repère d'observation cartésien $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ (en plus du repère cylindrique) avec la même origine, il est possible d'exprimer (par trigonométrie élémentaire) les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ du repère cartésien (ou inversement) :

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y & \vec{e}_x &= \cos(\theta) \vec{e}_\rho - \sin(\theta) \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\theta &= -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y & \vec{e}_y &= \sin(\theta) \vec{e}_\rho + \cos(\theta) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Remarque : On utilise très souvent le terme de repère polaire plutôt que repère cylindrique. Pour être plus précis, le repère polaire correspond au repère cylindrique mais à deux dimensions. Il se déduit du repère cylindrique en supprimant la troisième composante de l'espace représentée par le vecteur $\vec{e}_z$. Les vecteurs de base sont $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit simplement : $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$.

III.2.2) Expression du vecteur déplacement élémentaire

Comme vu précédemment : $d\vec{l} = d(\overrightarrow{OM}) = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho + dz \vec{e}_z + z d\vec{e}_z$, on sait que $d\vec{e}_z = 0$ car $\vec{e}_z$ est un vecteur fixe dans l'espace. Cependant le vecteur $\vec{e}_\rho$ est lié au point M , il dépend donc du temps. Pour déterminer l'expression du vecteur $d\vec{e}_\rho$ nous allons utiliser l'expression de $\vec{e}_\rho$ dans le repère cartésien. Nous avons :

$$d\vec{e}_\rho = d(\cos(\theta) \vec{e}_x) + d(\sin(\theta) \vec{e}_y)$$

$$d\vec{e}_\rho = d(\cos(\theta)) \vec{e}_x + d(\sin(\theta)) \vec{e}_y$$

$$d\vec{e}_\rho = -\sin(\theta) d\theta \vec{e}_x + \cos(\theta) d\theta \vec{e}_y$$

$$d\vec{e}_\rho = d\theta (-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y)$$

$$d\vec{e}_\rho = d\theta \vec{e}_\theta .$$

Ainsi on peut écrire :

$$d\vec{l} = d(\overrightarrow{OM}) = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z = \begin{vmatrix} d\rho \\ \rho d\theta \\ dz \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

III.2.3) Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ et exprimé dans le repère d'espace cylindrique se déduit du vecteur « déplacement élémentaire » :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Remarque : Il ne faut pas confondre à ce stade référentiel et repère. L'expression (1.10) traduit bien la vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Cependant nous utilisons le repère d'espace cylindrique pour l'exprimer. Il faut être conscient que la vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$ attaché au repère d'espace cylindrique s'exprime différemment. Elle est donnée par $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{z} \vec{e}_z$. En effet dans le référentiel $\mathcal{R}'$ les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ sont fixes.

III.2.4) Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ exprimé dans le repère d'espace cylindrique se déduit du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/\mathcal{R}} &= \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho \right) + \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{d^2\rho}{dt^2} \vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta + \rho \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Comme pour $d\vec{e}_\rho$ nous pouvons calculer $d\vec{e}_\theta$ à partir du repère cartésien. Nous avons :

$$d\vec{e}_\theta = d(-\sin(\theta) \vec{e}_x) + d(\cos(\theta) \vec{e}_y)$$

$$d\vec{e}_\theta = -\cos(\theta) d\theta \vec{e}_x - \sin(\theta) d\theta \vec{e}_y$$

$$d\vec{e}_\theta = -d\theta (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y)$$

$$d\vec{e}_\theta = -d\theta \vec{e}_\rho.$$

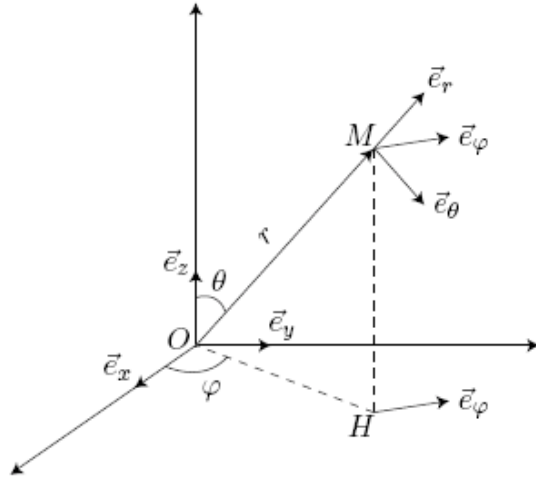
Ainsi l'expression générale de l'accélération dans le repère cylindrique est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/\mathcal{R}} &= \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_\rho + \left(2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z \\ \vec{a}_{M/\mathcal{R}} &= \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \\ 2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}. \quad (1.11) \end{aligned}$$

III.3) Repère sphérique

Le repère sphérique est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$. Les trois vecteurs sont mobiles, ils sont liés au point M en mouvement. Ce système de coordonnées est très adapté à des mouvements de rotation autour d'un centre, pour l'étude des forces centrales et des problèmes à symétrie sphérique.

III.3.1) Expression du vecteur position



La position de M dans ce repère est définie à partir du point origine O par ses coordonnées (r, θ, φ) comme présentée dans la figure ci-dessous. En prenant $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, on peut alors définir le vecteur unitaire $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$, ce qui permet d'écrire le vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r. \quad (1.12)$$

On définit H comme la projection de M dans le plan (x, O, y) . $\|\overrightarrow{OH}\| = r \sin(\theta)$.

Si on « attache » au référentiel un repère d'observation cartésien $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ (en plus du repère sphérique) avec la même origine, il est possible d'exprimer (par trigonométrie élémentaire) les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ du repère cartésien :

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

III.3.2) Expression du vecteur déplacement élémentaire

Comme vu précédemment : $\overrightarrow{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r$, et on peut montrer, en utilisant l'expression de $\vec{e}_r$ en coordonnée cartésiennes par exemple que $d\vec{e}_r = d\theta \vec{e}_\theta + \sin(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi$.

$$\text{Ainsi on peut écrire : } \overrightarrow{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin(\theta) d\varphi \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

III.3.3) Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ et exprimé dans le repère d'espace sphérique se déduit du vecteur « déplacement élémentaire » :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ r \sin(\theta) \dot{\varphi} \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

Remarque : Il ne faut pas confondre à ce stade référentiel et repère. L'expression (1.15) traduit bien la vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Cependant nous utilisons le repère d'espace sphérique pour l'exprimer. Il faut être conscient que la vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$ attaché au repère d'espace sphérique s'exprime différemment. Elle est donnée par $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho$. En effet dans le référentiel $\mathcal{R}'$ le vecteur $\vec{e}_\rho$ est fixe.

III.3.4) Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ exprimé dans le repère d'espace sphérique se déduit du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/\mathcal{R}} &= \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{e}_r \right) + \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \right) + \frac{d}{dt} \left(r \sin(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi \right) \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{dr}{dt} \sin(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi \\ &\quad + r \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + r \sin(\theta) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{e}_\varphi + r \sin(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \end{aligned}$$

Comme pour $d\vec{e}_r$ nous pouvons calculer $d\vec{e}_\theta$ et $d\vec{e}_\varphi$ à partir du repère cartésien et on montre que :

$$d\vec{e}_\theta = -d\theta \vec{e}_r + \cos(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{e}_\varphi = -\sin(\theta) d\varphi \vec{e}_r - \cos(\theta) d\varphi \vec{e}_\theta,$$

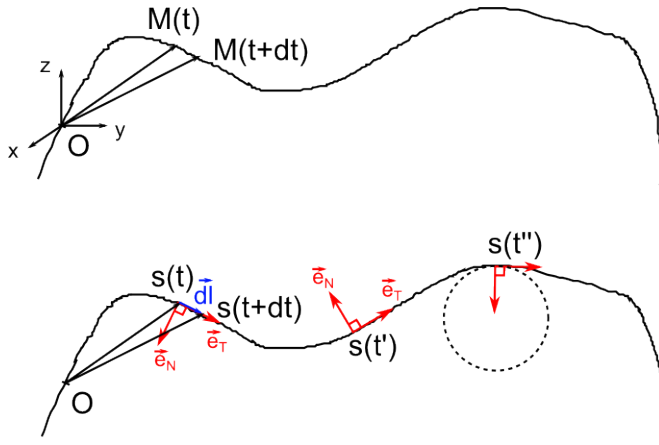
Ce qui amène le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/\mathcal{R}} &= \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 (\sin(\theta))^2 \right) \vec{e}_r \\ &\quad + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \right) \vec{e}_\theta \\ &\quad + \left(r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sin(\theta) + 2r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \cos(\theta) + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \sin(\theta) \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 (\sin(\theta))^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) \vec{e}_\theta + (r\ddot{\varphi} \sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\theta) + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin(\theta)) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \begin{vmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 (\sin(\theta))^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ r\ddot{\varphi} \sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\theta) + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin(\theta) \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

III.4) Repère de Frenet



Un repère très utilisé en mécanique du point est le repère d'espace de Frenet. Ce repère est très adapté à l'analyse de mouvement dont on connaît par avance la trajectoire (dans le cas de mouvements guidés par exemple).

Les coordonnées cartésiennes du point $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ définissent une trajectoire à laquelle on peut associer une abscisse curviligne $s(t)$ qui représente la distance parcourue entre

O et le point M à l'instant t . On associe à cette abscisse le repère de Frenet défini par trois vecteurs orthonormés $\vec{e}_T$, $\vec{e}_N$ et $\vec{e}_B$ mobiles dans le repère d'observation $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ et liés au point M . $\vec{e}_T$ est tangent à la trajectoire au point d'abscisse curviligne $s(t)$ et orienté selon les temps positifs. $\vec{e}_N$ est perpendiculaire à $\vec{e}_T$ et orienté selon la concavité de la trajectoire. Enfin $\vec{e}_B$ est normal au plan défini par $\vec{e}_T$ et $\vec{e}_N$ appelé plan « osculateur ». Il se définit par le produit vectoriel de $\vec{e}_T$ et $\vec{e}_N$:

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N.$$

III.4.1) Expression de la position

Dans le repère de Frenet, nous ne pouvons pas définir explicitement le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Comme nous l'avons précisé précédemment, nous utilisons plutôt l'abscisse curviligne $s(t)$ pour repérer la position du point M dans le temps sachant que la trajectoire est connue. Il est très important de noter que $s(t)$ est un **scalaire**. Elle est homogène à une longueur.

III.4.2) Expression du vecteur déplacement élémentaire

Étant donné la définition du repère de Frenet, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit simplement :

$$\overrightarrow{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = ds \vec{e}_T \quad (1.17)$$

$$\text{Avec } \|\overrightarrow{dl}\| = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2 + (dz)^2}$$

Notons que nous pouvons définir le vecteur $\vec{e}_T$ à partir de la différentielle $d(\overrightarrow{OM})$ en inversant l'expression (1.16), ainsi :

$$\vec{e}_T = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}.$$

III.4.3) Expression du vecteur vitesse

Comme pour les coordonnées cartésiennes et cylindriques, le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ exprimé dans le repère d'espace de Frenet est défini à partir du déplacement élémentaire. Nous avons simplement :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_T = \dot{s} \vec{e}_T = \|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\| \vec{e}_T. \quad (1.18)$$

Naturellement, le vecteur vitesse est dirigé selon la tangente à la trajectoire.

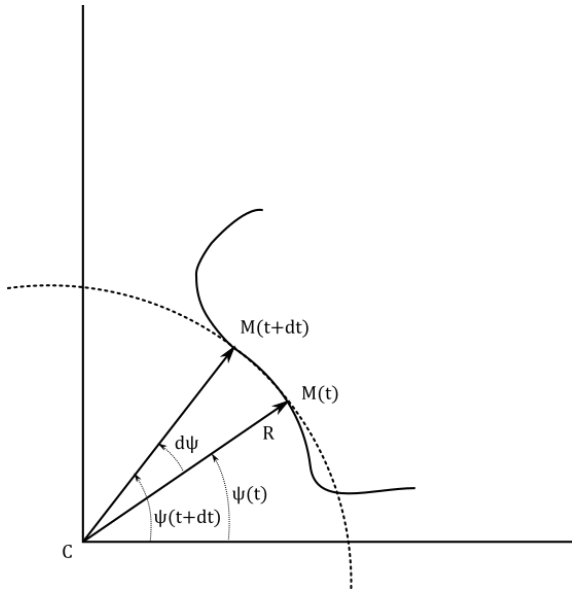
III.4.4) Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ exprimé dans le repère d'espace de Frenet se déduit du vecteur vitesse :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \vec{e}_T \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{e}_T + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\|}{dt} \vec{e}_T + \|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\| \frac{d\vec{e}_T}{dt}$$

La quantité $\frac{d\vec{e}_T}{dt}$ peut être évaluée à partir de la relation (1.2) et la figure ci-contre. Le vecteur perpendiculaire à $\vec{e}_T$ est simplement $\vec{e}_N$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_T}{dt} &= \frac{d\psi}{dt} \vec{e}_N = \frac{ds}{ds} \frac{d\psi}{dt} \vec{e}_N = \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dt} \vec{e}_N \\ \frac{d\vec{e}_T}{dt} &= \frac{d\psi}{ds} \|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\| \vec{e}_N. \end{aligned}$$



Finalement, la quantité $\frac{d\psi}{ds}$ peut être explicitée de manière graphique. En effet, d'après le schéma ci-contre, nous remarquons que ds (distance entre $M(t)$ et $M(t+dt)$) correspond à l'arc de cercle de rayon de courbure R de centre C et d'angle $d\psi$. R est donc le rayon de courbure de la trajectoire au point M . Il s'agit du rayon du cercle inscrit sur la trajectoire, de sorte que $\vec{CM} = -R\vec{e}_N$. Formellement, nous avons :

$$R = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{M(t+dt)M(t)}{\psi(t+dt) - \psi(t)} = \frac{ds}{d\psi}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\|}{dt} \vec{e}_T + \frac{\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\|^2}{R} \vec{e}_N. \quad (1.19)$$

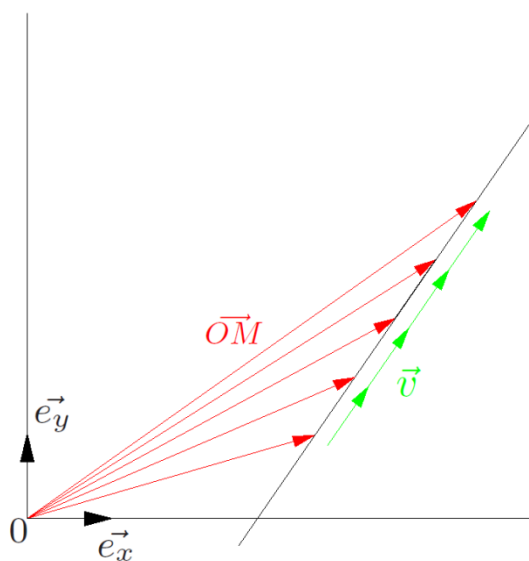
IV) Étude de mouvements élémentaires

L'étude de mouvements élémentaires est très utile pour se faire une idée claire de la formulation mathématique du mouvement en général. En effet, les mouvements rectilignes et circulaires parmi les mouvements les plus élémentaires sont très intuitifs car nous pouvons les appréhender simplement. Il est donc assez direct de formaliser ces mouvements en terme de vecteur vitesse et vecteur accélération. De plus, n'importe quel mouvement complexe peut se décomposer en une somme de mouvements rectilignes et circulaires. Comprendre finement ces mouvements de bases vous permettra de commencer à vous forger une « intuition mécanique ».

IV.1) Le mouvement rectiligne

Il s'agit certainement du mouvement le plus simple d'entre tous. Pour traiter ce type de mouvement, nous choisissons les coordonnées cartésiennes.

IV.1.1) Le mouvement rectiligne uniforme

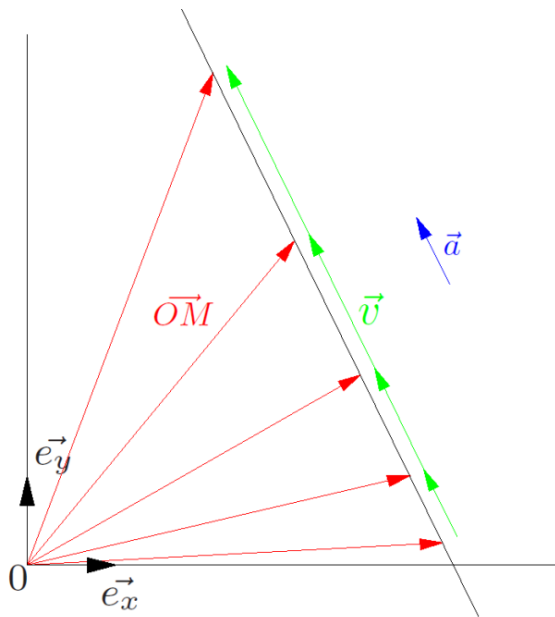


immobile.

Le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par les conditions suivantes :

- $\vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{v} = \vec{v}_0$, ni la direction, ni le sens du vecteur vitesse ne change au cours du temps, $\vec{v}_0$ est un vecteur constant.
- Le vecteur $\vec{OM}$ peut varier dans le temps, à la fois en direction et en sens. Sa norme varie linéairement avec le temps.
- $R \rightarrow \infty$.
- Notons aussi que $\|\vec{v}_0\| = 0$ est un cas particulier de mouvement rectiligne uniforme : l'objet est

IV.1.2) Le mouvement rectiligne uniformément accéléré (ou décéléré)



Le mouvement rectiligne uniformément accéléré (ou décéléré) est caractérisé par les conditions suivantes:

- $\vec{a} = \vec{a}_0$, avec $\vec{a}_0$ un vecteur constant.
- Le sens et la direction du vecteur vitesse $\vec{v}$ ne varie pas dans le temps. Sa norme varie linéairement avec le temps.
- Le vecteur vitesse $\vec{OM}$ peut varier dans le temps, à la fois en direction et en sens. Sa norme est une fonction quadratique du temps.
- Les vecteurs vitesse et accélération sont dans le même sens $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ dans le cas accéléré, tandis qu'ils sont en sens opposé $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ dans le cas retardé.
- $R \rightarrow \infty$.

IV.1.3) Le mouvement rectiligne non uniformément accéléré (ou décéléré)

Le mouvement rectiligne non-uniformément accéléré est caractérisé par les conditions suivantes :

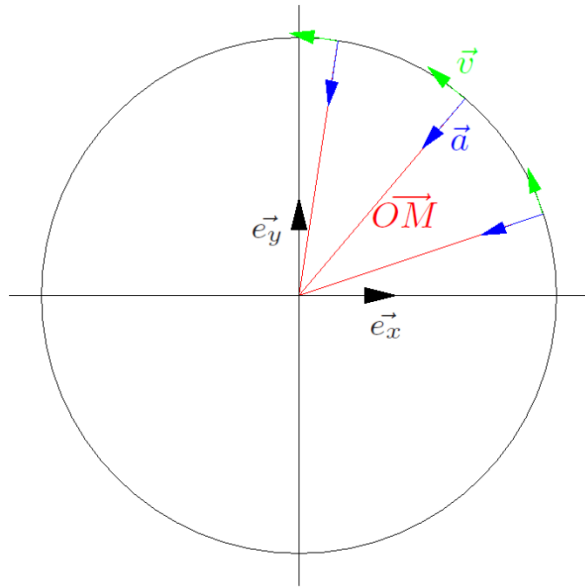
- Le sens et la norme du vecteur $\vec{a}$ peuvent varier dans le temps, mais sa direction ne varie pas !
- Le sens et la norme du vecteur $\vec{v}$ peuvent varier dans le temps, mais sa direction ne varie pas !
- Le vecteur vitesse $\vec{OM}$ peut varier dans le temps, à la fois en direction et en sens. Sa norme est une fonction « quelconque » du temps.
- $R \rightarrow \infty$.

IV.2) Le mouvement circulaire

Le mouvement « circulaire » est caractérisé par un rayon de courbure constant $R = R_0$. Il s'agit d'un mouvement plan. Nous choisissons de l'étudier dans le repère cylindrique dépourvu de la composante $\vec{e}_z$, il s'agit du repère polaire $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$.

IV.2.1) Le mouvement circulaire uniforme

Le mouvement circulaire uniforme est caractérisé par les conditions suivantes :



- $\rho = \rho_0$, rayon de courbure constant. La norme du vecteur position est constante. De ce fait, $\frac{d\rho}{dt} = 0$.

- Le mouvement circulaire est un mouvement plan, donc la direction et le sens du vecteur « vitesse angulaire » $\vec{\omega}$ ne varient pas. Par ailleurs, puisque le mouvement est uniforme, alors sa norme $\|\vec{\omega}\| = \omega$ est constante. Ainsi, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$.

- L'expression générale du vecteur vitesse dans le repère cylindrique se simplifie et devient :

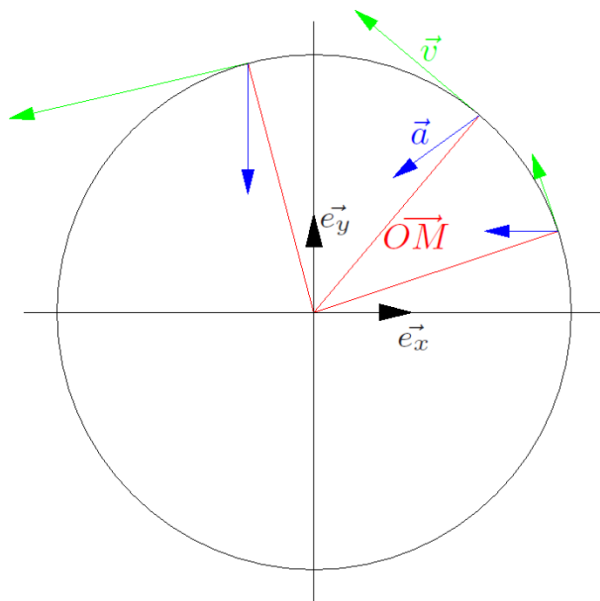
$$\vec{v} = \rho_0 \omega \vec{e}_\theta, \text{ avec } \|\vec{v}\| = \rho_0 \omega = \text{Cste.}$$

- L'expression générale du vecteur accélération dans le repère cylindrique se simplifie et devient :

$$\vec{a} = -\rho_0 \omega^2 \vec{e}_\rho, \text{ avec } \|\vec{a}\| = \rho_0 \omega^2 = \text{Cste.}$$

- Dans le cas du mouvement circulaire uniformément accéléré, le repère cylindrique et le repère de Frenet correspondent (presque !) : $\vec{e}_N = -\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_T = \vec{e}_\theta$.

IV.2.2) Le mouvement circulaire uniformément accéléré



Le mouvement circulaire uniformément accéléré est caractérisé par les conditions suivantes :

- $\rho = \rho_0$, rayon de courbure constant. La norme du vecteur position est constante. De ce fait, $\frac{d\rho}{dt} = 0$.

- Le vecteur « accélération angulaire » $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ est constant (en norme, direction et sens). La direction et le sens du vecteur "vitesse angulaire" $\vec{\omega}$ sont constants, mais sa norme varie linéairement avec le temps. On a $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \dot{\omega} = \text{Cste.}$

- L'expression générale du vecteur vitesse dans le

repère cylindrique se simplifie et devient :

$$\vec{v} = \rho_0 \omega(t) \vec{e}_\theta.$$

- L'expression générale du vecteur accélération dans le repère cylindrique se simplifie et devient :

$$\vec{a} = -\rho_0 \omega^2 \vec{e}_\rho + \rho_0 \dot{\omega}(t) \vec{e}_\theta.$$

IV.2.3) Le mouvement circulaire non uniformément accéléré

Le mouvement circulaire non-uniformément accéléré est caractérisé par les conditions suivantes :

- $\rho = \rho_0$, rayon de courbure constant. La norme du vecteur position est constante. De ce fait, $\frac{d\rho}{dt} = 0$.
- Il n'y a pas de conditions particulières sur $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, mais la direction du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ ne varie pas au cours du temps.
- Les expressions générales des vecteurs vitesse et accélération se simplifient uniquement avec $\dot{\rho} = 0$.

IV.3) Autres mouvements

Chaque mouvement peut être décomposé comme une somme de trajectoires rectilignes et circulaires. Certains mouvements un peu plus complexes que les mouvements rectilignes et circulaires obéissent à des équations mathématiques connues reliant entre elles les différentes coordonnées du repère. Citons, à titre d'exemple :

- Le mouvement hélicoïdal, à étudier de préférence dans le repère cylindrique, où $\rho = \rho_0$ mais $z = z(t)$. Il s'agit d'un mouvement de rotation dans le plan $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$ et de translation selon l'axe Oz .
- Le mouvement de spirale, à étudier de préférence dans le repère cylindrique, où $z = 0$ et $\rho = \rho(t)$. Il s'agit d'une rotation dans le plan $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$ accompagnée d'une variation de la coordonnée ρ .
- Le mouvement cycloïdal, à étudier de préférence dans le repère cartésien (ex : la trajectoire de la valve d'une roue de vélo en circulation). Il s'agit d'une rotation uniforme dans un plan accompagnée d'un mouvement rectiligne uniforme dans ce même plan.
- Les mouvements vibratoires, à étudier dans l'un ou l'autre des repères selon les symétries de la vibration (oscillateur harmonique).
- Le mouvement elliptique, le mouvement hyperbolique, le mouvement parabolique etc... Nous traiterons ce type de mouvement en APP mécanique.

CHAP 2 : Dynamique d'un point matériel, les trois lois de Newton.

Savoir-faire à acquérir par l'étudiant en fin de chapitre
- Comprendre la notion de force et savoir représenter sous forme vectorielle une force donnée. - Connaître l'expression des forces usuelles. - Être capable d'établir un bilan de forces sur un système défini. - Comprendre la notion d'inertie. - Être capable d'utiliser le principe fondamental de la mécanique et le théorème du moment cinétique pour déterminer le mouvement d'un point matériel dans un référentiel galiléen.

Introduction

Qu'elle est l'origine du mouvement d'un objet ? Nous avons tous conscience que le mouvement est lié aux forces qu'on lui applique. Par exemple nous faisons tous les jours l'expérience de déplacer des objets. Pour pousser un objet initialement immobile dans une direction donnée, il faut lui appliquer une force dans la direction voulue avec une certaine amplitude, c'est-à-dire en fournissant un certain effort physique. Ainsi l'objet immobile se déplace. L'effort à fournir donc l'amplitude de la force doit être d'autant plus grand que l'objet est massif (il est plus facile de déplacer une tasse qu'un bureau). Il en est de même lorsque l'on veut dévier un objet en mouvement, il faut lui appliquer une force dans la direction dans laquelle on veut dévier son mouvement. Cette force doit être d'autant plus grande que l'objet se déplace rapidement par rapport à nous. De ces sensations physiques ressortent deux concepts importants :

- la notion de direction et d'amplitude lorsqu'on applique une force. Naturellement ceci nous laisse à penser que pour décrire l'action d'une force il faudra faire appel à une représentation vectorielle comme pour la vitesse et l'accélération.

- la notion d'inertie. Plus un objet est massif plus il est difficile de le mettre en mouvement. Il en est de même de sa vitesse de déplacement, plus il est rapide plus il sera difficile de changer sa trajectoire. Cette notion complexe d'inertie est formalisée par la quantité de mouvement qui est le produit de la vitesse par la masse.

L'étude de la relation intime liant force et mouvement est l'objet de la dynamique. Dans ce chapitre nous aborderons les notions d'inertie, de quantité de mouvement, de forces (force de gravitation, force électromagnétique, forces de contact et de frottements...) ainsi que les principes établis par Isaac Newton.

I) Quelques définitions

1.1) Notion de masse

La masse dite « inerte » est un coefficient (scalaire) qui détermine le comportement d'un point matériel vis-à-vis d'une force. Plus la masse inerte est grande plus il sera difficile de changer le mouvement du point matériel. La masse est une grandeur additive dont l'unité est le kilogramme (kg). Pour connaître la masse d'un corps, il suffit d'additionner la masse de chacune des particules le constituant. En mécanique classique, **la masse d'un point matériel est invariante dans le temps et ne dépend pas des référentiels (donc indépendante du mouvement du corps)**, c'est une caractéristique intrinsèque du point matériel.

La masse peut aussi être utilisée pour caractériser l'interaction gravitationnelle (nous détaillerons cette interaction par la suite) que tout le monde connaît bien, c'est grâce à elle que nous gardons les pieds sur Terre. Pour la distinguer de la masse « inerte » on parle alors de masse « grave ». Dans le langage courant nous ne faisons aucune distinction entre ces deux masses mais a priori il n'y a aucune raison théorique de les considérer équivalentes. L'expérience montre cependant qu'elles le sont jusqu'à un degré de précision très élevé. C'est pour cela que nous déterminons expérimentalement la masse « inerte » d'un corps grâce à une balance (en fait nous mesurons la masse « grave »). Précisément, on obtient la masse du corps en le comparant à la masse d'un corps étalon.

Albert Einstein a été l'un des premiers à se poser la question : est-ce que la masse « grave » et la masse « inerte » représentent deux concepts différents ou sont-elles deux manifestations du même phénomène ? Il décida d'ériger en postulat l'équivalence de ces deux ce qui lui a permis d'établir sa théorie de la relativité générale. Dans cette théorie, Albert Einstein met en évidence que l'interaction gravitationnelle n'est pas une force comme on l'entend en physique moderne mais plutôt une conséquence de la déformation de l'espace-temps par la matière.

1.2) Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point M par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ comme nous l'avons évoqué en introduction est le produit de la masse d'un corps par sa vitesse :

$$\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m \vec{v}_{M/\mathcal{R}} .$$

C'est une quantité vectorielle comme la vitesse. Elle obéit aux lois de l'analyse vectorielle. Elle s'exprime en kg.m.s^{-1} . Tout comme la vitesse elle dépend du référentiel dans lequel se fait l'observation du mouvement. Comme on l'a vu en introduction $\vec{p}$ est la quantité par excellence pour décrire la relation entre mouvement et force. Ceci se précisera avec les lois de Newton.

Lorsque le mouvement est rectiligne et uniforme, la vitesse étant constante, la quantité de mouvement aussi. On qualifie alors la quantité de mouvement de moment linéaire, c'est la constante du mouvement de translation.

1.3) Notions forces

Un point matériel de masse m est rarement totalement isolé, il subit la plupart du temps des interactions avec les objets extérieurs. Ces interactions peuvent se faire à distance (les corps ne se touchent pas physiquement comme c'est le cas de l'interaction gravitationnelle) ou en contact (votre doigt qui pousse une tasse). Quel que soit leur nature (cf. paragraphe II) elles peuvent être modélisées par des vecteurs forces. Le vecteur force précise dans quelle direction, dans quel sens et avec quelle amplitude se fait l'interaction. Pour être précis on parle généralement de la force qu'exerce un corps 1 sur un corps 2, on la note $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$. La force d'un corps 1 sur un corps 2 est souvent associée à un point d'application (notamment lorsqu'on parle d'interaction de contact) comme lorsqu'on pousse du doigt une tasse. La force exercée par le doigt sur la tasse apparaît à l'endroit où le doigt touche la tasse. Dans le cas d'une interaction à distance la force s'applique sur la globalité du corps matériel. La force subie par un système est **indépendante du référentiel d'étude choisi**. L'unité de la force dans le système international est le Newton (N), $1\text{N} = 1\text{kg.m.s}^{-2}$.

Lorsqu'un point matériel subit plusieurs forces, comme F est une quantité vectorielle, la force totale subie par le corps est la somme des forces appliquées sur le corps :

$$\vec{F}_{ext \rightarrow 1} = \sum_i \vec{F}_{i \rightarrow 1} .$$

A l'inverse un système totalement isolé ne subit aucune force de la part de l'extérieur, $\vec{F}_{ext \rightarrow 1} = \vec{0}$. Nous pouvons remarquer que la somme totale des forces peut être nulle sans pour autant que le corps soit isolé.

La physique moderne a mis en évidence qu'il existe quatre interactions fondamentales dans l'univers et pas plus. Ces interactions rendent compte de tous les phénomènes physiques que nous observons. Les plus connues et les mieux comprises sont l'interaction gravitationnelle qui nous permet de rester liés à la Terre et qui est responsable de la rotation de la lune autour de la Terre ou de la Terre autour du soleil *etc...*; l'interaction électromagnétique qui est responsable de la cohésion des matériaux, de l'électricité, des rayonnements électromagnétiques, des forces de contacts entre objets : forces s'opposant à l'interpénétration des objets, force de frottements; l'interaction faible qui intervient entre autre dans le phénomène de fusion nucléaire et l'interaction forte qui est responsable de la cohésion des noyaux atomiques entre les protons et les neutrons.

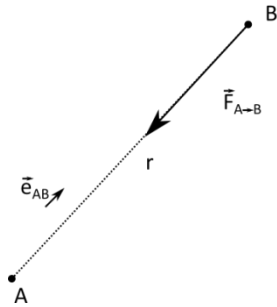
II) Quelques forces usuelles

2.1) La force de gravitation

La force ou interaction gravitationnelle est une force toujours attractive qui agit à distance entre deux corps massiques. C'est la force qui nous « colle » à la Terre, qui est responsable de la chute des corps, de la rotation des planètes autour du soleil, de l'activation de la fusion au sein d'une étoile par compression des atomes entre eux... C'est une interaction à distance, les corps n'ont pas besoin

d'être en contact pour interagir. L'expression de la force exercée par un corps A de masse m_A (unité kg) sur un corps B de masse m_B (unité kg) se note :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A} = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{e}_{AB}$$



où r est la distance entre les corps A et B , $\vec{e}_{AB}$ est un vecteur unitaire dirigé de A vers B et $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ est la constante universelle de gravitation. L'intensité de la force gravitationnelle est extrêmement faible, c'est la plus faible des quatre interactions fondamentales. Ainsi, ses effets ne sont perceptibles que lorsque des objets très massifs sont en jeu.

Pour les corps de masse m situés sur la surface terrestre et repérés par le point M (c'est-à-dire les objets de la vie courante) nous pouvons écrire :

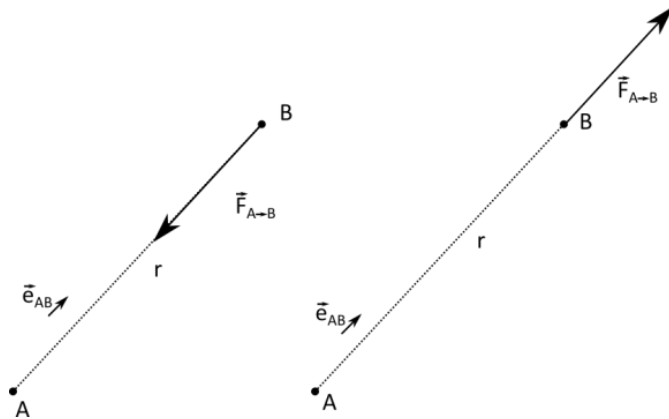
$$\vec{F}_{T \rightarrow M} = -G \frac{m_T m}{(R+h)^2} \vec{e}_{OM} \approx -G \frac{m_T m}{R^2} \vec{e}_{OM} = -mG \frac{m_T}{R^2} \vec{e}_{OM} = m\vec{g},$$

avec R le rayon de la Terre, h la hauteur du corps en question qui est en générale très inférieure au rayon Terrestre et O le centre de la Terre,

$$\vec{g} = -G \frac{m_T}{R^2} \vec{e}_{OM}.$$

Le vecteur $\vec{g}$ est communément appelé l'accélération de la pesanteur.

2.2) La force électrique ou force de Coulomb



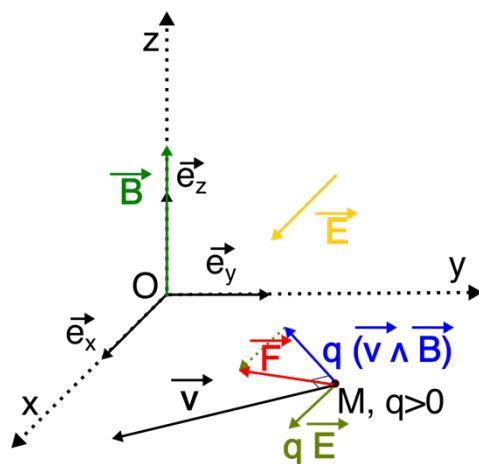
La force électrique est l'interaction qui existe entre un électron et un proton ou entre deux électrons. Elle traduit l'interaction entre deux corps A et B portant respectivement les charges électriques q_A (unité Coulomb noté C) et q_B . S'ils sont séparés d'une distance r , la force exercée par le corps A sur le corps B (objets ponctuels) est :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{A \rightarrow B} &= -\vec{F}_{B \rightarrow A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{e}_{AB} \\ &= q_B \vec{E}_A(r) \end{aligned}$$

où $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ est la constante diélectrique du vide et $\vec{e}_{AB}$ est un vecteur unitaire dirigé de A vers B . Si les charges sont de même signe, elles se repoussent (figure de droite). Si elles sont de signes différents, elles s'attirent (figure de gauche). $\vec{E}_A(r)$ représente le champ électrique créé par l'objet A au point B , cette quantité dépend uniquement de la source A et non de l'objet subissant la force.

Les forces électrostatiques se manifestent principalement à l'échelle atomique. En effet c'est elles qui sont responsables de la formation des atomes (noyau + électrons), des liaisons chimiques entre atomes, de la cohésion des solides etc... Elles peuvent quelquefois se manifester à l'échelle macroscopique (attraction ou répulsion entre deux objets chargés) elles sont alors largement supérieures à la force de gravitation. Cependant, la matière est globalement neutre à l'échelle macroscopique : électrons et protons jouent des rôles antagonistes, les uns annulant les effets des autres. Ainsi les manifestations des forces électrostatiques à l'échelle macroscopique deviennent faibles et à courte portée.

2.3) La force électromagnétique ou force de Lorentz



Comme on l'a vu précédemment une charge électrique q subit une force en présence d'un champ électrique. Il en est de même en présence d'un champ magnétique. La force totale ressentie par une charge électrique q animée d'une vitesse $\vec{v}$ en présence d'un champ magnétique $\vec{B}$ et d'un champ électrique $\vec{E}$ est appelée force de Lorentz. Elle s'écrit

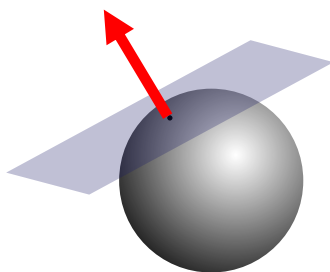
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Nous notons que le champ électrique est généré par des charges (cf. 1.4.2) et, en l'absence de champ magnétique,

la force de Lorentz est équivalente à la force de Coulomb. Le champ magnétique $\vec{B}$, quant à lui, est généré par des charges en mouvement (courant électrique).

2.4) Les forces de contact et de frottements

2.4.1) Force de réaction



Les forces de réaction traduisent le fait que deux corps solides ne peuvent pas s'interpénétrer. En effet, lorsque deux corps solides sont suffisamment proches l'un de l'autre, les noyaux (charges positives) des atomes dont ils sont constitués se repoussent fortement, sauf s'il y a réaction chimique ! Elles sont toujours dirigées selon la normale à la surface de contact (plan tangent) entre deux corps (pour cette raison, elles sont souvent représentées par la notation $\vec{N}$). Microscopiquement, la force de

Coulomb est à l'origine des forces de contacts. Le terme « force de contact » prête à confusion : tout comme la force gravitationnelle, la force de Coulomb agit « à distance » et les noyaux des différents corps n'ont pas besoin de « se toucher » pour exercer une force l'un sur l'autre. Les interactions élémentaires traduisant les forces de contact ont bien lieu « à distance », mais cette dernière est si petite à notre échelle que nous avons tendance à extrapoler et à penser qu'elle est nulle.

Lorsque deux corps sont en contact nous pouvons écrire :

$$\vec{N}_{A \rightarrow B} = -\vec{N}_{B \rightarrow A} \text{ ou bien encore } \vec{R}_{A \rightarrow B} = -\vec{R}_{B \rightarrow A}.$$

2.4.2) Force de frottement de glissement solide

La force de frottement de glissement solide apparaît entre deux corps solides en contact. L'interaction élémentaire responsable des frottements est la force de Coulomb. Le phénomène microscopique est très compliqué et dépend de nombreux facteurs tels que l'état, la nature et la vitesse des surfaces en glissement l'une par rapport à l'autre.

Malgré la complexité du phénomène, on caractérise simplement l'interaction par une force de frottement qui peut être statique ou dynamique (de glissement). Lorsque deux solides 1 et 2 en contact ne bougent pas l'un par rapport à l'autre, la force de frottement statique (qui peut empêcher un corps de tomber sous l'effet de la gravité par exemple) se note :

$$\|\vec{f}_{1 \rightarrow 2}\| = \|\vec{f}_{2 \rightarrow 1}\| = f_s \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| = f_s \|\vec{N}_{2 \rightarrow 1}\|,$$

f_s est le coefficient statique de frottement, il est sans dimension. $\|\vec{f}\|$ donne par exemple la force minimum nécessaire pour mettre en mouvement relatif deux corps initialement en contact et immobiles l'un par rapport à l'autre.

Lorsque les deux solides en contact se déplacent l'un par rapport à l'autre, la force de frottement de glissement solide s'oppose toujours au mouvement des deux corps, et par conséquent a un sens opposé à la vitesse. Expérimentalement, la force de frottement de glissement solide du corps 1 sur le corps 2 $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}^g$ peut être considérée comme proportionnelle au module de la force de réaction $\|\vec{N}\|$. On a :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2}^g = -f_c \|\vec{N}\| \frac{\vec{v}_{2/1}}{\|\vec{v}_{2/1}\|},$$

où f_c est le coefficient de frottement cinétique sans dimension et $\frac{\vec{v}_{2/1}}{\|\vec{v}_{2/1}\|}$ désigne un vecteur unitaire dirigé selon la direction de $\vec{v}_{2/1}$ qui représente la vitesse de glissement du corps 2 par rapport au corps 1.

En général $f_s > f_c$. Les coefficients de frottement sont des paramètres empiriques du problème.

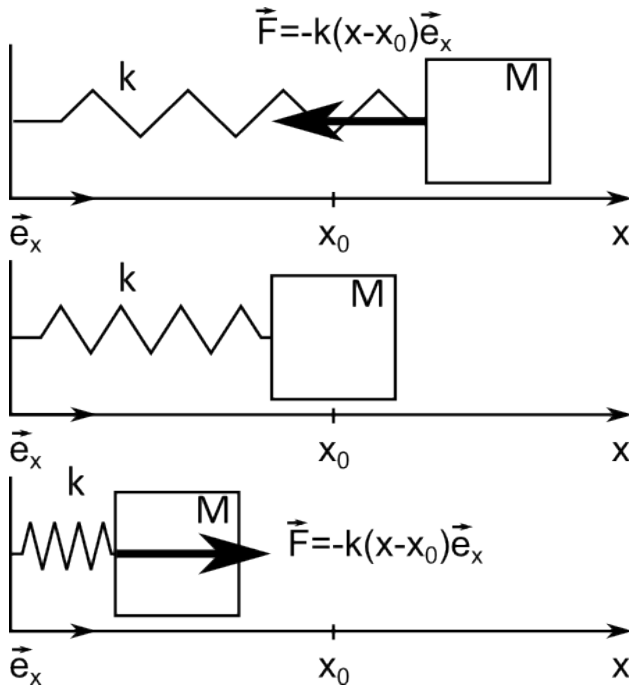
2.4.3) Force de frottement visqueux

La force de frottement visqueux apparaît lorsqu'un corps solide se déplace au sein d'un milieu fluide type gaz ou liquide. C'est une force de contact comme la force de frottement de glissement solide. Elle est due aux chocs engendrés par les molécules libres du fluide sur le corps solide. Lorsque la vitesse de déplacement est relativement faible, la force de frottement est en première approximation, proportionnelle à la vitesse, et de direction opposée.

$$\vec{f}_v = -\kappa \cdot \eta \cdot \vec{v} \text{ (valable uniquement pour de faibles vitesses !)}$$

ou κ est un coefficient lié à la forme du corps solide et η est le coefficient de viscosité (kg.s^{-1}) du fluide considéré. On la trouve souvent sous la forme $\vec{f}_v = -\alpha \cdot \vec{v}$ avec α le coefficient de frottements (kg.s^{-1}). $\vec{v}$ est la vitesse de déplacement du corps solide par rapport au milieu fluide.

2.5) La force de rappel d'un ressort



La force de rappel d'un ressort est une force élastique. Elle s'exprime ainsi :

$$\vec{F} = -k(x - x_0) \cdot \vec{e}_x,$$

(valable uniquement pour $(x - x_0) \ll x_0$)

où k (N.m^{-1}) est une constante caractéristique du ressort appelée « raideur du ressort », x_0 est la longueur à vide du ressort et x est la longueur à un instant t du ressort. $\vec{e}_x$ est un vecteur unitaire dirigé dans l'axe du ressort et orienté depuis son point d'attache vers son extrémité. La force de rappel change en amplitude et en sens selon la longueur du ressort. Ce type de force est très utilisé pour modéliser le comportement de système élastique/flexible et/ou oscillant comme la corde d'un instrument d'une guitare, une poutre en béton etc...

III) Les lois de la dynamique d'un point matériel

III.1) Principe d'inertie (1^{ère} Loi de Newton)

En introduction, nous avons évoqué le fait que plus un corps est massif plus il est difficile de le mettre en mouvement ou changer son mouvement. Nous avons appelé ce concept l'inertie. Lorsque ce concept est poussé plus loin (ce que Galilée, Descartes et Newton ont imaginé), on pourrait penser qu'un corps ayant une vitesse donnée constante n'a aucune raison de changer de direction ou de vitesse car sa masse inerte l'en « empêche » à moins que quelque chose agisse sur l'objet. Le principe d'inertie est fondé sur cette réflexion et diverses expérimentations réalisées en premier par Galilée. Sous sa forme moderne le principe d'inertie s'énonce de la façon suivante :

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, un point matériel isolé ou dont la somme des forces agissant sur lui est nulle, se déplace toujours avec une vitesse constante ($\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_0$), c'est à dire sans accélération. La trajectoire d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme.

Rq : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ peut être nulle, dans ce cas le point est immobile, c'est un cas particulier du mouvement rectiligne uniforme.

Le principe d'inertie suppose donc que l'état *au repos* d'un système est celui pour lequel son vecteur vitesse est constant, et qu'il n'est donc pas nécessaire de lui appliquer continuellement une force pour le maintenir à vitesse constante. « **Le mouvement n'a donc pas besoin de force pour exister !** » Cette idée semble contre-intuitive, car notre expérience indique le contraire : il faut bien que le moteur d'une voiture tourne pour que celle-ci maintienne sa vitesse même lorsque la trajectoire est rectiligne uniforme ! Cette ambiguïté provient tout naturellement du fait que, dans notre vie de tous les jours, nous subissons des forces de frottements de manière que les systèmes mécaniques que nous observons ne soient jamais *isolés*. Pour s'en convaincre, il faut imaginer un objet sur une surface lisse comme de la glace où les frottements sont très faibles. On constate que lorsqu'on lance un objet sur une telle surface, il est capable de parcourir des distances beaucoup plus importantes que s'il était lancé sur du bitume, de la terre ou du parquet... En extrapolant (ce qu'a fait Galilée), on peut se convaincre que lorsque les frottements sont nuls, donc que l'objet est sans interaction l'objet gardera sa vitesse constante.

Dans l'énoncé du principe d'inertie, une autre difficulté provient de la définition d'un référentiel galiléen : « Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la première loi de Newton est vérifiée ». Ainsi le principe d'inertie s'appuie sur l'existence d'un référentiel galiléen, lequel s'appuie lui-même sur la définition du principe d'inertie. Expérimentalement, un référentiel galiléen « parfait » n'existe pas, mais certains peuvent s'en approcher... Théoriquement, nous *supposons a priori* l'existence d'un référentiel galiléen dans lequel nous appliquons le principe d'inertie. C'est ensuite la comparaison entre la théorie et l'expérience qui permet de vérifier *a posteriori* si le référentiel expérimental choisi est oui ou non un « bon » référentiel galiléen. Un excellent référentiel galiléen pour l'étude des corps dans le système solaire est le référentiel de Copernic.

Il est aussi très important de noter que le principe d'inertie est à l'origine d'une loi fondamentale de la physique moderne, la loi de conservation de la quantité de mouvement. En effet, si la vitesse d'un point matériel sans interaction est constante, sa quantité de mouvement aussi, donc elle ne varie pas au cours du temps, $\frac{d\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = 0$. Cette loi s'applique aussi pour un corps constitué d'une multitude de points matériels.

III.2) Principe Fondamentale de la Dynamique (PFD) (2^e Loi de Newton)

Comment décrire le mouvement d'un système non-isolé, c'est à dire soumis à l'action d'une ou plusieurs forces ? Comment relier les forces (causes du mouvement) à l'état cinématique du système (le mouvement) ? De la 1^{ère} loi de Newton, on comprend bien qu'un mouvement rectiligne n'a pas besoin de force pour perdurer mais qu'il faut une force pour modifier ce mouvement que ce soit en direction ou en amplitude. La relation permettant de quantifier l'altération du mouvement d'un point matériel M en présence de forces extérieures $\vec{F}_{ext \rightarrow M}$ fut introduite pour la première fois par Isaac Newton. Dans un **référentiel galiléen** $\mathcal{R}$ elle s'écrit de la façon suivante :

$$\sum \vec{F}_{ext \rightarrow M} = \frac{d\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}}.$$

Remarque : cette relation est vraie pour un corps ayant une masse constante.

Cette relation, valable uniquement dans un référentiel galiléen, établit un lien profond entre les **forces extérieures au système** et l'**accélération** d'un point matériel (et non la vitesse). L'application d'une force modifie la direction de la vitesse et/ou sa norme. Il convient alors de réfléchir au rôle joué par la masse dans un système non-isolé : elle va caractériser la réponse d'un corps matériel (son accélération) vis-à-vis de son interaction avec d'autres corps (les forces, c'est à dire les causes du mouvement). Par exemple, considérons un point matériel de masse m , isolé, ayant une trajectoire rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen. A un certain temps t , ce point matériel « ressent » une force $\vec{F}$ donnée (interaction à distance due à un autre corps, ou une collision). Si sa masse est très grande, cette force n'aura que peu d'influence sur la trajectoire du point matériel et ce dernier continuera sa course comme si rien ne s'était passé. Au contraire, si sa masse est très faible, la force qui lui est appliquée va brutalement l'accélérer, le décélérer, ou le faire changer de direction. Nous avons vu que les variations du mouvement (c'est à dire les variations du vecteur vitesse en direction ou en norme) représentent aussi la notion d'accélération... Il n'est donc pas étonnant que cette dernière soit égale au rapport de la force sur la masse : $\vec{a}_{M/R} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Réciproquement, l'expression ci-dessus implique que plus un corps est massique, plus il faudra lui appliquer une force « conséquente » pour pouvoir le détourner de son mouvement rectiligne uniforme (dans un référentiel galiléen). Ceci est valable pour accélérer un corps, pour le décélérer, ou bien simplement pour changer sa direction de déplacement. Voici quelques exemples permettant d'apprécier qualitativement le principe d'inertie :

- Lorsqu'un avion A380 de 500 tonnes est à l'arrêt, sur la piste d'envol, il a besoin d'une force importante (plusieurs turboréacteurs) pour pouvoir prendre de la vitesse - c'est à dire accélérer - et enfin décoller. En effet, sa masse conséquente s'oppose à une quelconque variation de vitesse... L'avion, immobile au départ, "souhaite" le rester !
- Ce même avion (A380) s'apprête à atterrir... Une fois que les roues ont touché la piste d'atterrissage, la vitesse de l'avion est toujours très importante. De la même manière que précédemment, il est nécessaire de freiner « fort » pour pouvoir stopper l'avion : là encore, son inertie s'oppose à toute variation de vitesse, même s'il s'agit dans ce cas-là, de la réduire. Initialement, l'avion possède une vitesse et « souhaite » la maintenir !
- Un moustique est en train de voler paisiblement à vitesse constante... lorsqu'une légère brise se lève ! Ce dernier va se mettre à tourbillonner au grès des mouvements d'air dans lesquels il se trouve. Ici, sa faible masse ne constitue pas un frein aux forces qui lui sont appliquées. Par conséquent, même si le moustique est soumis de très faibles forces, son accélération est grande et de ce fait, sa trajectoire va beaucoup varier.

Il est important de souligner que la première loi de Newton est contenue dans la deuxième. En fait la deuxième loi se suffit à elle-même mais historiquement le principe d'inertie a été le premier à être mis en évidence. De plus, ce principe étant assez contre-intuitif, il est important d'insister dessus. En effet lorsque $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$, $\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt} = m \vec{a}_{M/R} = \vec{0}$ ceci implique que l'accélération est nulle, donc le mouvement se fait à vecteur vitesse constante. La trajectoire est bien rectiligne uniforme.

III.3) PFD sur un ensemble de points matériels et principe d'action réaction (3^e Loi de Newton)

D'après la deuxième loi de Newton seules les forces extérieures au système ont une influence sur l'accélération du point matériel M . Il est vrai que la précision forces « extérieures » peut paraître inutile sachant qu'un point matériel n'a pas réellement de volume. La distinction forces extérieures/forces intérieures prend tout son sens avec les corps composés d'une multitude de points matériels. Avant tout définissons le centre d'inertie ou barycentre de masse C d'un ensemble de points matériels. On a pour N points matériels :

$$M\vec{OC} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{OA}_i,$$

avec

$$M = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Chaque point caractérisé par sa position $\vec{OA}_i$ possède une masse m_i dont la somme est égale à la masse totale M .

Le PFD s'écrit pour un ensemble de N points matériels de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext \rightarrow i} &= \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_{i/\mathcal{R}}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_{i/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2}{dt^2}_{/\mathcal{R}} \vec{OA}_i = \frac{d^2}{dt^2}_{/\mathcal{R}} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{OA}_i \right) \\ \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext \rightarrow i} &= M \frac{d^2}{dt^2} \vec{OC} \Big|_{\mathcal{R}} = M \frac{d\vec{v}_{C/\mathcal{R}}}{dt} = M \vec{a}_{C/\mathcal{R}}, \end{aligned}$$

$\vec{v}_{C/\mathcal{R}}$ et $\vec{a}_{C/\mathcal{R}}$ sont la vitesse et l'accélération du barycentre de masse C .

Ainsi les forces intérieures ne jouent pas de rôle dans l'accélération du centre de masse C de l'ensemble des N points matériels. En conséquence, lorsque les forces extérieures sont nulles, encore une fois la vitesse du barycentre de masse est constante en vertu du premier principe de Newton.

Ceci a une conséquence directe sur les forces intérieures. Si l'on considère un système isolé de deux points matériels A et B en interaction l'un avec l'autre sans aucune autre interaction, le PFD appliqué à chacun des points nous donne les deux relations suivantes :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = m_B \frac{d\vec{v}_{B/\mathcal{R}}}{dt} \text{ et } \vec{F}_{B \rightarrow A} = m_A \frac{d\vec{v}_{A/\mathcal{R}}}{dt}$$

Si on additionne ces deux équations on obtient :

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} + \vec{F}_{A \rightarrow B} = m_A \frac{d\vec{v}_{A/\mathcal{R}}}{dt} + m_B \frac{d\vec{v}_{B/\mathcal{R}}}{dt}$$

Or $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ et $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ sont des forces intérieures à l'ensemble AB. Le système étant isolé, $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$. Le PFD appliqué au système AB s'écrit :

$$m_A \frac{d\vec{v}_{A/R}}{dt} + m_B \frac{d\vec{v}_{B/R}}{dt} = 0$$

En conséquence :

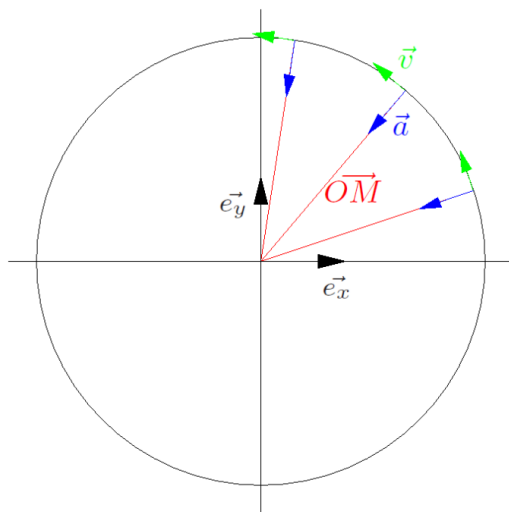
$$\vec{F}_{B \rightarrow A} + \vec{F}_{A \rightarrow B} = 0$$

La force de A sur B est égale à la force de B sur A. Ceci constitue la troisième loi de Newton ou le principe d'action-réaction.

Lorsque deux particules sont en interaction, la force qui s'exerce sur un système est égale et opposée à la force qui s'exerce sur l'autre.

III.4) Théorème du moment cinétique

La quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ d'un point matériel est parfois appelée le moment linéaire de l'objet. En effet lorsque le mouvement du point est en translation rectiligne uniforme, $\vec{p}$ est une constante. Pourrait-on imaginer une quantité similaire permettant de décrire l'uniformité du mouvement de rotation d'un point ?



Intéressons-nous à un point matériel M en rotation uniforme (rayon R et vitesse angulaire ω) autour de l'axe Oz . Dans le repère cylindrique, sa vitesse est donnée par l'expression :

$$\vec{v} = R\omega \vec{e}_\theta.$$

La quantité de mouvement associée est :

$$\vec{p} = mR\omega \vec{e}_\theta,$$

$\vec{p}$ n'est pas fixe car le vecteur $\vec{e}_\theta$ varie dans le temps. Les trois informations importantes permettant de caractériser un mouvement circulaire sont l'axe de rotation Oz , la vitesse angulaire de rotation ω ainsi que le rayon R . Ainsi, nous pourrions définir une nouvelle quantité, appelée moment cinétique de rotation noté $\vec{L}$ de la façon suivante :

le rayon R . Ainsi, nous pourrions définir une nouvelle quantité, appelée moment cinétique de rotation noté $\vec{L}$ de la façon suivante :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = R\vec{e}_\rho \wedge mR\omega \vec{e}_\theta = mR^2\omega \vec{e}_z = R\|\vec{p}\|\vec{e}_z.$$

$\vec{L}$ est bien un vecteur constant au même titre que $\vec{p}$ l'est pour un mouvement de translation uniforme. Cette définition du moment cinétique par rapport au point O est vraie quelque-soit la trajectoire du point matériel M .

De manière générale, considérons le moment cinétique d'un point M par rapport à un point fixe C (pas forcément l'origine du repère). Si on dérive l'expression du moment cinétique par rapport au temps, nous obtenons :

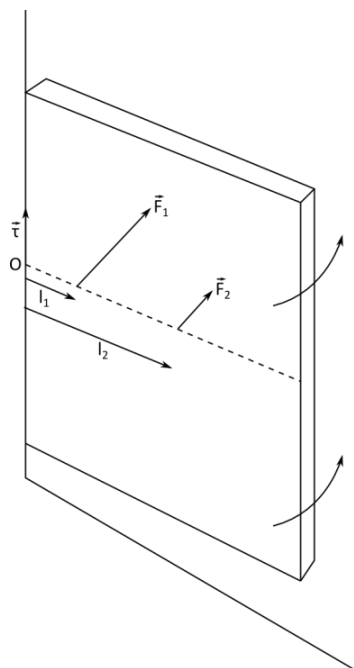
$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \frac{d\vec{CM}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{CM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\vec{CO} + \vec{OM})}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{CM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{CM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{CM} \wedge \sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i} = \sum_i \vec{CM} \wedge \vec{F}_{ext \rightarrow i}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{C, ext \rightarrow i}$$

Cette dernière relation définit ce qu'on appelle le théorème du moment cinétique, c'est l'équivalent du PFD pour un mouvement de rotation autour du point C fixe dans le référentiel choisi. La quantité $\vec{\mathcal{M}}_{C, ext \rightarrow i}$ représente le moment des forces extérieures appliquées au point matériel par rapport au point C .

Concrètement, le moment cinétique peut être assimilé à « une quantité de rotation ». Intuitivement, nous imaginons bien qu'une particule tournant très vite autour d'un point avec une orbite très petite serait susceptible de posséder une « quantité de rotation » équivalente à une particule tournant lentement autour d'un point avec une orbite très grande. Considérons le cas de deux toupies tournant sur elles-mêmes et que l'on souhaiterait mettre à l'arrêt en appuyant sur leurs axes de rotation avec notre doigt. Imaginons que les deux toupies ont la même masse : pour l'une d'elle la masse est concentrée près de l'axe, pour l'autre elle est surtout présente en périphérie de la toupie. Si les deux toupies possèdent la même vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}(t)$, nous aurons certainement plus de mal à arrêter la deuxième toupie plutôt que la première. Ceci car la masse de la deuxième toupie est plus éloignée de l'axe de rotation que dans le cas de la première toupie. Malgré leur vitesse angulaire égale, la deuxième toupie possède un moment cinétique (ou « quantité de rotation ») plus grand que la première.



Le moment d'une force caractérise « l'effet produit » par cette force vis-à-vis d'un mouvement de rotation du système considéré. Considérons l'exemple ci-contre où vous souhaitez ouvrir une porte initialement immobile. Vous pouvez procéder de deux manières différentes : soit vous poussez la porte très fort en un point proche de l'axe, soit vous poussez légèrement la porte en un point loin de l'axe. Dans les deux cas, le résultat sera le même. C'est à dire « le taux de mise en rotation » de la porte sera le même ! Or, ce que l'on vient de qualifier comme « le taux de mise en rotation » est une quantité physique bien déterminée : il ne s'agit ni plus ni moins que la dérivée de la « quantité de rotation » qui est égale au moment de la force.

CHAP 3 : Travail et Energie.

Savoir-faire à acquérir par l'étudiant en fin de chapitre
- Savoir calculer le travail exercé par une force sur un trajet donné. - Savoir appliquer le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer le mouvement d'un point matériel. - Savoir déterminer l'énergie potentielle associée à une force conservative. - Etre capable d'utiliser le théorème de l'énergie mécanique pour analyser et prédire qualitativement une trajectoire.

Introduction

Nous avons tous une idée plus ou moins claire de ce que représente l'énergie. Nous avons tous conscience que c'est quelque chose que l'on peut consommer, on consomme du carburant (énergie chimique) pour avancer, mais aussi stocker, par exemple l'énergie électrique est stockée sous forme chimique dans une pile. Dans la vie courante, le terme travail est largement moins utilisé que le terme énergie, nous verrons que le travail correspond au transfert d'énergie.

Le concept d'énergie est né avec la mécanique classique, notamment l'énergie cinétique, l'énergie potentielle ou encore l'énergie mécanique. C'est au 19^{ème} siècle que ce concept fut généralisé à toutes les sciences (thermodynamique, chimie etc...) grâce à la formulation du théorème de conservation de l'énergie par le Dr Julius Robert Mayer (médecin). Ce principe a été vérifié expérimentalement pour la première fois par James Prescott Joule et précisé par la suite par Herman Ludwig Von Helmholtz. Le principe de conservation de l'énergie est un des fondements de la science moderne. Nous allons préciser dans ce chapitre d'où provient le concept d'énergie et quel est son lien profond avec le mouvement.

I) Reformulation du principe fondamentale de la mécanique

Le PFD décrit la **variation au cours du temps** de la quantité de mouvement d'un objet sous l'action d'une force. Cependant pour certaines expériences la notion de temps peut être « superflue ». Par exemple, lorsqu'on élève une masse d'une hauteur h à une hauteur h' , ce qui compte c'est que l'on a effectué un mouvement de h à h' et non le temps que l'on a mis pour effectuer le mouvement. On cherche alors à déterminer quelle quantité physique permet de caractériser la mécanique du système entre l'altitude h et l'altitude h' . Lors de cette expérience nous ou une quelconque machine devons exercer une force sur la masse pour l'élever. Nous avons tous la sensation lors du processus de perdre quelque chose, en effet, si la masse est lourde nous nous sentirons fatigués après l'avoir levée et d'autant plus que $h'-h$ est grand. De même, si une machine soulève la masse, lors du déplacement, elle doit consommer davantage d'électricité ou d'un carburant quelconque à mesure que $h'-h$ grandit.

Il en est de même lorsqu'on cherche à accélérer ou arrêter une voiture. En effet lorsqu'on veut arrêter une voiture ou un vélo, ce qui nous intéresse davantage c'est la distance sur laquelle on va devoir freiner pour arrêter le véhicule. Nous savons tous par expérience que plus le véhicule va vite plus la distance de freinage est grande pour une même force de freinage. D'ailleurs l'on peut remarquer que la distance de freinage n'augmente pas linéairement avec la vitesse mais de manière quadratique ! Il en est de même lorsqu'on veut accélérer un vélo ou une voiture sur une distance donnée il faut fournir davantage d'effort physique (en pédalant) ou consommer davantage de carburant lorsque la distance diminue.

Ce qui apparaît essentiel dans les expériences précédentes c'est la distance parcourue par l'objet. Nous savons que le PFD est une formulation temporelle de la mécanique, une force multipliée par un temps donne un changement de quantité de mouvement. Essayons d'exprimer le PFD sous une forme ne tenant pas compte du temps, autrement dit sous une forme spatiale. Pour cela nous utilisons les équations suivantes :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \text{ et } d\vec{l} = \vec{v} dt$$

Il vient alors :

$$m d\vec{v} = \vec{F} dt$$

$$\Rightarrow m d\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{F} dt \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow m \vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Clairement nous avons supprimé la notion de temps dans cette équation. Finalement nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2\right) &= \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot d\vec{v} \\ \Rightarrow d\left(\frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2\right) &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \end{aligned} \quad (1)$$

Nous faisons apparaître une nouvelle quantité $\frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2$ dont la variation est la force appliquée au système multipliée par le déplacement. Le temps n'apparaît pas de manière explicite, cette équation n'apporte pas d'informations supplémentaire par rapport au PFD, c'est une formulation alternative du PFD, une formulation spatiale.

II) Energie cinétique et travail

II.1) Energie cinétique

Le premier terme de l'équation (1) n'est rien d'autre que l'énergie cinétique qui caractérise l'énergie de « mouvement » emmagasinée par un corps en déplacement. On pose :

$$E_c = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2.$$

Elle caractérise le mouvement du corps tout comme la quantité de mouvement, cependant ce n'est pas une « reformulation de la quantité de mouvement » mais bien une nouvelle façon de caractériser le mouvement car ce n'est pas le vecteur vitesse qui est utilisé mais la norme de la vitesse au carré. L'énergie cinétique a pour unité le Joule (J). Un joule vaut 1 N.m ou encore 1 kg.m².s⁻².

II.2) Travail et puissance d'une force

Le deuxième terme de l'équation (1) correspond au travail infinitésimal δW effectué par la force $\vec{F}$.

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Sur un parcours donné nous pouvons calculer le travail total effectué par la force $\vec{F}$ de la façon suivante :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Le travail a pour unité le Joule, il décrit le transfert d'énergie entre le point matériel et la personne ou la machine qui applique la force sur le point matériel. En effet, la machine ou la personne a perdu une certaine quantité d'énergie $W_{A \rightarrow B}$ en générant la force qui a permis le déplacement du point matériel et l'a transféré sous forme cinétique au point matériel.

On définit la puissance d'une force de la façon suivante :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

son unité est le Watt ou J.s⁻¹.

II.3) Théorème de l'énergie cinétique

Ainsi l'équation (1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_A^B d\left(\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2\right) &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ \left[\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2\right]_A^B &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A \rightarrow B} \\ E_c(B) - E_c(A) &= W_{A \rightarrow B} \end{aligned}$$

La variation d'énergie cinétique entre les points A et B d'un parcours correspond au travail effectué par la force appliquée au système. Ceci constitue le **théorème de l'énergie cinétique**. Comme dit précédemment, ce théorème n'apporte pas d'informations supplémentaires. On pourrait qualifier le PFD de « formulation temporelle de la dynamique » et le théorème de l'énergie cinétique de « formulation spatiale de la dynamique ». En d'autres termes on regarde la variation de cinématique d'un objet à différents points de la trajectoire et non à différents instants. Nous verrons que dans

certaines situations, cette formulation nous permet d'appréhender plus simplement la résolution d'un problème de mécanique. De plus elle introduit le concept d'énergie et de travail.

II.4) Signification du travail

Du théorème de l'énergie cinétique on constate que le travail d'une force apparaît comme un transfert d'énergie. Lorsque la force appliquée sur un objet engendre un déplacement d'un point A à un point B , elle lui communique une vitesse et donc lui donne de l'énergie de « mouvement ». L'énergie passe du système qui applique la force au point matériel. Pour préciser ce propos revenons à l'expression du travail :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Décomposons la force appliquée sur l'objet en une force perpendiculaire à la trajectoire et une force tangente à la trajectoire. Nous utilisons le repère de Frenet pour cette description.

$$\vec{F} = F_T \vec{e}_T + F_N \vec{e}_N \text{ et } d\vec{l} = ds \vec{e}_T$$

Ainsi nous pouvons écrire le travail sous la forme suivante :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B (F_T \vec{e}_T + F_N \vec{e}_N) \cdot ds \vec{e}_T = \int_A^B F_T ds$$

La composante de la force qui travaille est uniquement la composante tangentielle. En effet uniquement cette composante est capable de modifier l'amplitude de la vitesse du corps et donc lui communiquer une énergie cinétique. D'après le PFD on a :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$F_T \vec{e}_T + F_N \vec{e}_N = m \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + m \frac{v^2}{R} \vec{e}_N$$

donc

$$m \frac{dv}{dt} = F_T$$

Ainsi une force perpendiculaire au déplacement d'un objet ne lui communique pas d'énergie cinétique. On voit donc la différence qu'il existe entre énergie cinétique et quantité de mouvement. Une **force perpendiculaire au déplacement modifie** la quantité de mouvement donc **la trajectoire**, mais **ne change pas la norme de la vitesse donc l'énergie stockée**, contrairement à une force tangente au mouvement qui modifie **énergie cinétique** et **quantité de mouvement**.

Le travail peut être positif si la force accélère l'objet ou négatif si la force s'oppose au mouvement et décélère l'objet. Parmi les forces usuelles vues au chapitre 2 nous connaissons deux forces qui ne travaillent jamais et une force qui fournit un travail toujours négatif. La **force de réaction** d'un support ainsi que **la partie magnétique de la force de Lorentz ne travaillent pas** car elles sont toujours perpendiculaires au mouvement. Elles peuvent uniquement courber la trajectoire d'un objet.

Enfin la **force de frottement** étant toujours opposée à la vitesse **fournit un travail négatif**, elle ne peut que ralentir un objet et lui faire perdre de l'énergie. On dit qu'elle **dissipe l'énergie**.

Reprenons l'exemple de la voiture qui freine. Grâce au théorème de l'énergie cinétique on montre que pour une même force de freinage la distance d'arrêt L augmente de manière quadratique avec la vitesse. Ceci provient du fait que l'énergie cinétique est de forme quadratique :

$$L = \frac{mv^2}{2F}$$

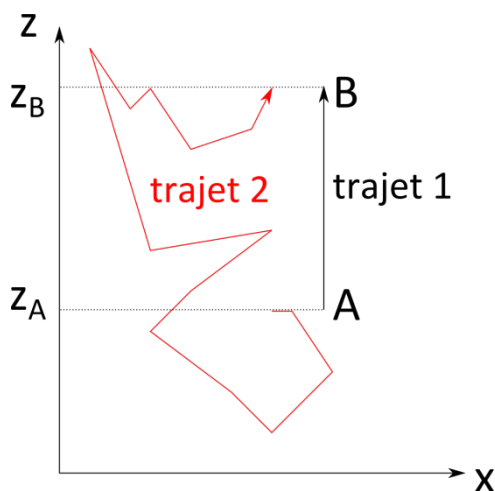
III) Energie potentielle et forces conservatives

III.1) Forces non conservatives et forces conservatives

Lorsque l'on calcule le travail d'une force sur un trajet donné, nous rencontrons deux cas de figures :

- (i) Le travail final ne dépend que de ce qui se passe au point initial A et au point final B de la trajectoire et non de la manière dont on passe de A à B . On dit alors que la force est conservative.
- (ii) Le travail final dépend de la manière dont on passe du point initial A au point final B . On dit alors que la force est non conservative.

Exemple de force conservative : la force de pesanteur $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$



$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -mg\vec{e}_z \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) \\ &= \int_A^B -mgdz = -mgz_B + mgz_A \end{aligned}$$

On constate clairement que quel que soit le trajet suivi par la masse pour aller de A vers B (trajet 1 ou 2 dans l'exemple ci-contre), le travail ne dépend que de z_A et z_B .

Exemple de force non conservative : la force de frottement $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha v\vec{e}_T$

On considère que l'objet se déplace à vitesse constante entre A et B . En utilisant le repère de Frenet on a :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\alpha v\vec{e}_T \cdot ds\vec{e}_T = \int_A^B -\alpha v ds = -\alpha v \int_A^B ds$$

Dans ce cas, le travail effectué sur le trajet 2 sera plus grand en valeur absolue que le travail effectué sur le trajet 1 car la distance à parcourir sur le trajet 2 est beaucoup plus grande que sur le trajet 1.

III.2) Energie potentielle

Dans le cas d'une force conservative, on peut clairement associer une fonction permettant de calculer le travail à partir du moment où l'on connaît le point initial et le point final de la trajectoire. Cette fonction est appelée énergie potentielle, elle est notée E_p . Ainsi le travail correspond à la différence d'énergie potentielle entre le point final et le point initial.

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = -\Delta E_p = -E_p(B) + E_p(A)$$

On verra dans le paragraphe suivant l'utilité du signe moins.

Lorsque l'on écrit le travail sous sa forme infinitésimale on obtient :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = -dE_p.$$

On dit alors que la force dérive d'une énergie potentielle. En effet, en utilisant le repère cartésien on peut écrire :

$$\vec{F} \cdot \vec{dl} = (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{F} \cdot \vec{dl} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$$

$$\Rightarrow$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial E_p}{\partial x} dx - \frac{\partial E_p}{\partial y} dy - \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \text{ et } F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \text{ et } F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Cette notation est condensée sous la forme suivante :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p), \text{ avec } \overrightarrow{\text{grad}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

III.3) Exemple d'énergie potentielle

Force de pesanteur :

Dans le cas de la force de pesanteur, l'énergie potentielle dépend de la hauteur de la masse. En reprenant l'exemple précédent (paragraphe III.1), on a :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{l} = -E_p(B) + E_p(A) = -mgz_B + mgz_A$$

Il vient :

$$E_p(z) = mgz + cste$$

La constante n'a que peu d'importance car ce qui importe réellement est la différence d'énergie potentielle et non la valeur absolue. On peut fixer arbitrairement $E_p = 0$ lorsque $z = 0$ ce qui implique que la constante est nulle, ainsi :

$$E_p(z) = mgz.$$

Remarque : on parle de l'énergie potentielle de la masse mais en fait il faudrait dire l'énergie potentielle du système terre-masse.

Force de rappel d'un ressort :

La force de rappel d'un ressort s'écrit $\vec{F} = -k(x - x_0)\vec{e}_x$. Le calcul du travail nous donne :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -k(x - x_0) dx = -\frac{1}{2}k(x_B - x_0)^2 + \frac{1}{2}k(x_A - x_0)^2 = -E_p(B) + E_p(A)$$

Le travail ne dépend que de la position initiale et finale. Ainsi on peut écrire :

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = k(x - x_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2}k(x_B - x_0)^2 + cste$$

Comme pour la force de pesanteur on pose que E_p est nulle lorsque $x = x_0$, ainsi :

$$E_p = \frac{1}{2}k(x_B - x_0)^2$$

Force électrique :

La force électrique subie par une charge placée dans un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e}_x$ s'écrit $\vec{F} = qE\vec{e}_x$. Le calcul du travail nous donne :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B qE \cdot dx = qE(x_B - x_A) = -E_p(B) + E_p(A)$$

Le travail ne dépend que de la position initiale et finale. Ainsi on peut écrire :

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = -qE$$

$$E_p = -qEx + cste$$

Comme pour la force de pesanteur et la force de rappel d'un ressort on pose que E_p est nulle lorsque $x = 0$, ainsi :

$$E_p = -qEx.$$

Avec l'expression de Coulomb on obtient :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot (dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta) = \int_A^B q \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = q \left(-\frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_B} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right)$$

Le travail ne dépend que de la position initiale et finale. Ainsi on peut écrire :

$$-\Delta E_p = q \left(-\frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_B} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right)$$

$$E_p(r) = q \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} + cste = q \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En posant que l'énergie potentielle est nulle à l'infini, la constante doit être nulle.

IV) Energie mécanique

IV.1) Théorème de l'énergie mécanique

Considérons une masse soumise à la fois à des forces conservatives et des forces non conservatives. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors de la façon suivante :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B}^c + W_{A \rightarrow B}^{nc} = -E_p(B) + E_p(A) + W_{A \rightarrow B}^{nc}$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + W_{A \rightarrow B}^{nc}$$

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W_{A \rightarrow B}^{nc}$$

On appelle alors la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, **l'énergie mécanique du système E_m** . C'est la raison pour laquelle nous avons utilisé un moins lors du calcul du travail d'une force conservative. Il vient alors :

$$\Delta E_m = W_{A \rightarrow B}^{nc}$$

Ainsi nous pouvons énoncer un nouveau théorème :

La variation d'énergie mécanique d'un point matériel est égale aux travaux des forces non conservatives appliquées au système.

Dans le cas où le point matériel n'est soumis qu'à des forces conservatives, la variation d'**énergie mécanique est nulle** :

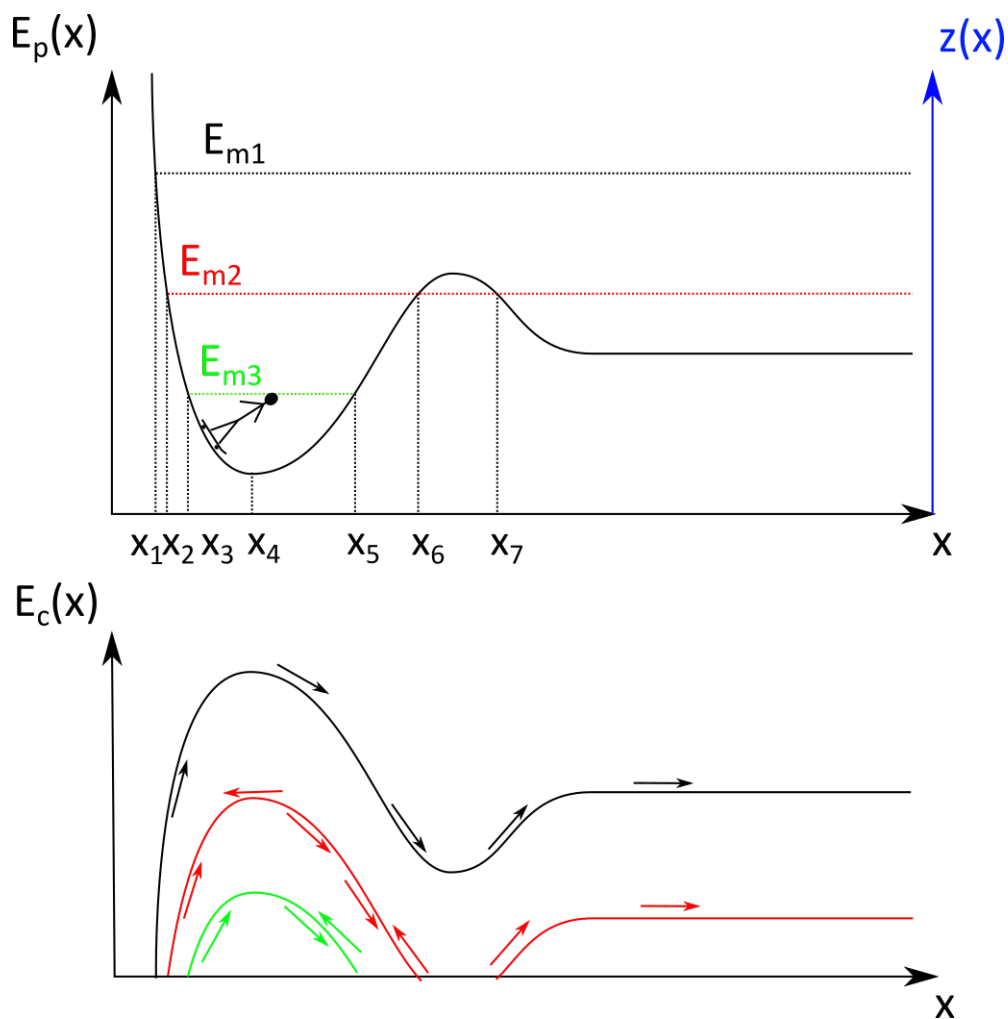
$$\Delta E_m = 0.$$

Ainsi l'**énergie mécanique** du point est **une constante du mouvement**. Ce théorème de mécanique a donné naissance à une loi fondamentale des sciences modernes, la loi de conservation de l'énergie ou principe de conservation de l'énergie.

IV.2) Puit et barrière de potentielle, signification de l'énergie potentielle

Le théorème de l'énergie mécanique est un outil puissant dans certaines situations, il permet d'appréhender très simplement la dynamique d'un système. Lorsqu'un point matériel est soumis à une force conservative dont l'énergie potentielle forme des creux et des bosses appelés respectivement puits de potentiel et barrières de potentielle il est assez aisé de prédire la trajectoire du point. Considérons une énergie potentielle $E_p(x)$ dépendant d'une seule variable x comme sur la figure ci-dessous. Cette forme d'énergie peut correspondre à l'énergie potentielle de gravitation d'un skateboarder ne subissant aucun frottement sur une piste vallonnée. Analysons ce qui se passe pour plusieurs valeurs initiales de l'énergie mécanique :

- Si le skateboarder possède l'énergie mécanique E_{m1} et qu'il se situe à la position x_1 . Il va descendre la piste, son énergie potentielle va diminuer et se convertir en énergie cinétique. Vu l'amplitude de l'énergie mécanique le skateboarder aura une énergie cinétique non nulle qui augmentera entre x_1 et x_4 puis diminuera entre x_4 et la bosse comprise entre x_6 et x_7 . Il finira par avoir une vitesse constante au-delà de la position x_7 car l'énergie potentielle est constante.
- Dans le cas où le skateboarder possède l'énergie mécanique E_{m2} , deux cas de figures se présentent. Si le skateboarder part de la position x_2 il descend la colline jusqu'à la position x_4 où sa vitesse sera maximum puis remonte jusqu'à la position x_6 où son énergie cinétique s'annule. Ainsi il repart dans l'autre sens etc... S'il part de la position x_7 , son énergie cinétique va augmenter jusqu'à la fin de la barrière d'énergie potentielle puis rester constante.
- Dans le cas où le skateboarder possède l'énergie mécanique E_{m3} , le skateboarder naviguera entre les positions x_2 et x_5 avec une vitesse maximum à la position x_4 .



L'énergie potentielle est une énergie de position qui est stockée en un point et potentiellement libérable pour fournir de l'énergie cinétique à un objet. En effet, si le skateboarder est maintenue à la position x_1 , il ne possède pas d'énergie cinétique mais il en a potentiellement. En effet, lorsqu'on le lâche, l'énergie potentielle de position se convertit et génère de l'énergie cinétique car la force à l'origine de l'énergie potentielle est toujours présente que le skateboarder soit en mouvement ou à l'arrêt, elle est inscrite dans « l'espace ». Nous avons évoqué le cas de l'énergie potentielle de gravitation mais il en est de même pour l'énergie potentielle d'un ressort ou l'énergie potentielle électrique (due à la composante électrique de la force de Lorentz).

CHAP 4 : Changement de référentiel, composition des mouvements et dynamique dans un référentiel non galiléen.

Savoir-faire à acquérir par l'étudiant en fin de chapitre

- Savoir faire la différence entre les notions de référentiel, repère et base.
- Connaître la loi de composition des vitesses et des accélérations.
- Comprendre la notion de référentiel galiléen et non galiléen.
- Savoir appliquer le PFD dans un référentiel non galiléen.

Introduction

Nous avons vu au chapitre 1 que le mouvement d'un objet devait s'étudier par rapport à un référentiel, en d'autres termes il est lié au référentiel. L'objet de ce chapitre sera de décrire les relations entre la vitesse et l'accélération d'un même objet exprimées dans deux référentiels différents. Ainsi nous introduirons les concepts de dynamique dans les référentiels non galiléens et les forces d'inertie comme la force centrifuge etc...

Ces notions de forces d'inertie et de changement de référentiel ont eu de grandes implications dans les siècles passés, notamment la démonstration par Foucault de la rotation de la Terre.

I) Composition des vitesses et accélérations

I.1) Dérivée d'un vecteur dans deux référentiels différents

Soit un référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ considéré fixe et un référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ mobile par rapport à $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Dérivons l'expression d'un vecteur $\vec{u}$ exprimée dans la base $\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}$ par rapport à $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$

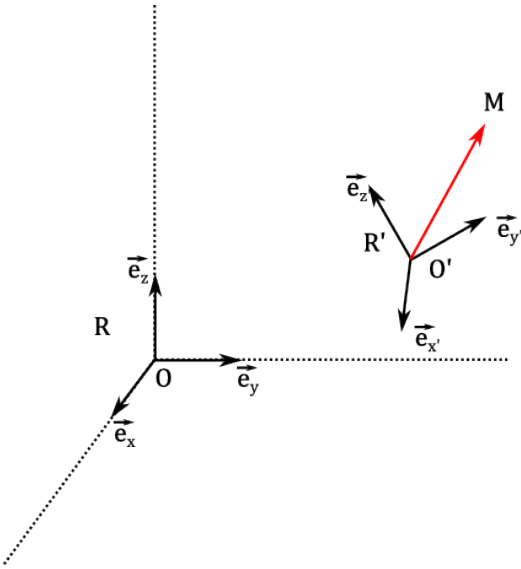
$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \frac{d(u_{x'}\vec{e}_{x'} + u_{y'}\vec{e}_{y'} + u_{z'}\vec{e}_{z'})}{dt} \\ &= \dot{u}_{x'} \vec{e}_{x'} + u_{x'} \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + \dot{u}_{y'} \vec{e}_{y'} + u_{y'} \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + \dot{u}_{z'} \vec{e}_{z'} + u_{z'} \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} \end{aligned}$$

Les trois vecteurs $\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}$ forment une base orthonormée, ils sont donc fixes entre eux et tournent tous de la même façon à un instant t donné. On note le vecteur rotation du référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$. On peut donc simplifier l'expression précédente de la manière suivante :

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = u_{x'}' \vec{e}_{x'} + u_{y'}' \vec{e}_{y'} + u_{z'}' \vec{e}_{z'} + u_{x'}' (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{x'}) + u_{y'}' (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{y'}) + u_{z'}' (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{z'})$$

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

I.2) Composition des vitesses



Le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est considéré fixe et le référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ est mobile par rapport à $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$.

Remarque : nous pourrions considérer $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ fixe et $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ mobile, tout est relatif.

La vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est notée $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$.

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

De la même manière la vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ est notée $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$.

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'}$$

Les coordonnées de M dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ et dans $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ sont liées par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Ainsi la dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ s'écrit :

$$\left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

En conclusion, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

Avec $\vec{v}_{M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ la vitesse du point M par rapport à $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ comme si nous le fixions à un instant t dans le référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$. $\vec{v}_{M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est aussi appelée la vitesse d'entraînement du référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. En décomposant, $\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}$ est la vitesse de translation de $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ par rapport à $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ et $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$ traduit l'influence de la rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ sur la vitesse du point M .

I.3) Composition des accélérations

L'accélération du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est notée $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$.

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

De la même manière l'accélération du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ est notée $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$.

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}'} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} = \ddot{x}'\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\vec{e}_{y'} + \ddot{z}'\vec{e}_{z'}$$

Relation entre les accélérations :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/\mathcal{R}} &= \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{d(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \\ &= \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \right) \wedge \overrightarrow{O'M} \\ &\quad + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) \\ &= \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} \wedge \overrightarrow{O'M} + 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}) \end{aligned}$$

Nous obtenons au final :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Avec $\vec{a}_e = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M})$ l'accélération d'entraînement du référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ et $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ l'accélération de Coriolis.

I.4) Référentiel, repère et base

Il ne faut pas confondre les concepts de *référentiel*, de *repère d'espace* et de *base*. Dans un référentiel donné, le mouvement d'un point matériel peut être mathématiquement décrit en utilisant des bases différentes. Les bases vectorielles ne sont que des outils mathématiques servant à exprimer des vecteurs en faisant apparaître leurs composantes. Les vecteurs n'ont pas besoin d'un point origine pour être exprimés, seule une base suffit... Cependant le physicien a besoin de situer exactement le point matériel dans l'espace et requiert, quand à lui, une origine. L'association d'un point origine et d'une base constitue un *repère d'espace*. Enfin, dans un référentiel donné, les repères d'espace peuvent être :

- fixes. Dans ce cas, le repère d'espace est lié au référentiel. Ces deux notions deviennent redondantes et nous utilisons le terme de *repère d'observation* (cf. chapitre 1).
- en translation. Dans ce cas, la base vectorielle est fixe, mais le point origine peut décrire un mouvement complexe dans le référentiel choisi.
- en rotation. Dans ce cas, le point origine est fixe, mais la base peut tourner de manière complexe dans le référentiel choisi.
- en translation et en rotation. Dans ce cas, le point origine et la base (le repère) peuvent être animés d'un mouvement complexe dans le référentiel choisi.

Bien que mathématiquement décrit de manières différentes, le mouvement d'un point matériel restera toujours le même si on ne change pas de référentiel. Inversement, le mouvement d'un mobile ne sera pas le même suivant le référentiel dans lequel l'observateur se situe. Ce chapitre est dédié au changement de référentiel, c'est à dire à la manière dont le mouvement « se transforme » en passant d'un référentiel à un autre. Ce processus est indépendant du repère choisi, qui ne constitue qu'un outil mathématique servant à exprimer des vecteurs. Les démonstrations et relations obtenues dans le cadre de ce chapitre restent valables quel que soit le repère d'espace choisi.

II) Dynamique dans un référentiel non galiléen

II.1) PFD dans un référentiel non galiléen

Dans le chapitre 2 nous avons précisé que le PFD s'écrit dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ de la manière suivante :

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}_{M/\mathcal{R}}$$

Les forces $\vec{F}_i$ mises en jeu sont les forces réelles dont nous avons listé certaines au début du chapitre 2.

Qu'est-ce qu'un référentiel non galiléen? C'est un référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen.

Écrivons le PFD dans le référentiel galiléen en décomposant l'accélération comme vu précédemment. **Rappelons que les forces réelles ne dépendent pas du référentiel choisi**, ainsi :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c$$

$$\sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$$

Cette deuxième équation est l'écriture du PFD dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ car le membre à droite de l'équation ne dépend que de l'accélération du point M dans le référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$. Cependant, nous faisons apparaître du côté des forces deux contributions inertielles, $-m\vec{a}_e$ et $-m\vec{a}_c$ qui sont qualifiées de forces inertielles, ou pseudo-forces car elles dépendent du choix du référentiel. Nous écrivons le PFD sous une forme plus commode :

$$\sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$$

Avec $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$ la force inertielle d'entraînement et $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$ la force inertielle de Coriolis.

II.2) Précision sur les référentiels galiléen

- Que se passe t'il lorsque le référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ est en translation uniforme par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$?

Dans ce cas $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$ car le référentiel ne tourne pas et $\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}$ car le référentiel $\mathcal{R}'(O, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ n'accélère pas et se déplace à vitesse constante.

$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = \vec{0} \text{ et } \vec{F}_c = -m\vec{a}_c = \vec{0}$$

On retrouve l'équation du PFD dans un référentiel galiléen

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$$

Ceci signifie qu'un référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi galiléen. Seuls les référentiels en mouvement accéléré (de translation, de rotation ou de translation/rotation) sont non galiléens.

- Comment être sûr qu'un référentiel est galiléen, comment le définir ?

On choisit un référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ que l'on considère galiléen dans un premier temps. On étudie le mouvement du point matériel M grâce à la formulation du PFD dans un référentiel galiléen. Il est donc important de faire la liste de toutes **les forces réelles** subies par le point M . Une fois les équations du mouvement obtenues, on compare les prédictions théoriques à l'expérience. Si le mouvement est correctement décrit, le référentiel peut être considéré galiléen. Dans le cas contraire, si les prédictions théoriques ne permettent pas de reproduire le mouvement réel c'est que le référentiel est non galiléen et qu'il faut ajouter les forces inertielles afin de correctement décrire le mouvement du point matériel dans le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ choisi.

Nous pouvons aussi définir un référentiel galiléen en observant le mouvement d'un point matériel ne subissant aucune force. Si le point matériel garde en permanence un mouvement de translation uniforme par rapport au référentiel choisi, le référentiel est galiléen (cf. principe d'inertie au chapitre 2).

II.3) Exemple de Référentiel galiléen et non galiléen

- Le référentiel lié à la terre (généralement celui d'un observateur immobile sur le sol) n'est pas galiléen car la Terre tourne sur elle-même et décrit une orbite autour du soleil. Elle a donc un mouvement accéléré. Cependant dans beaucoup d'expériences où les vitesses de déplacement sont faibles et le temps de l'expérience court on pourra considérer en première approximation ce référentiel comme galiléen.
- Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de la Terre et ses trois axes pointent vers trois étoiles lointaines considérées immobiles lorsque la terre décrit son orbite autour du soleil. Ce référentiel n'est pas galiléen car il tourne autour du soleil. Cependant lorsque l'expérience est courte par rapport au temps mis par la Terre pour décrire une orbite complète autour du soleil, il peut être considéré galiléen. Ce référentiel est très adapté pour étudier l'effet de la rotation de la Terre sur le mouvement des corps sur Terre.
- Le référentiel de Copernic dont l'origine se situe au barycentre du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles lointaines est supposé galiléen.

II.4) Théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen

Le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe C s'écrit dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext \rightarrow i} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{O, ext \rightarrow i}$$

Considérons le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$. Nous procédons comme dans le chapitre 2. On considère le moment cinétique du point M par rapport au point C' fixe dans le référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$, alors :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{L}_{C'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} &= \left. \frac{d\overrightarrow{C'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{C'M} \wedge m \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} \\ &= \left. \frac{d\overrightarrow{C'O'} + \overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{C'M} \wedge m \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{C'M} \wedge m \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d\vec{L}_{C'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{C'M} \wedge \left(\sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \right) = \sum_i \overrightarrow{C'M} \wedge (\vec{F}_{ext \rightarrow i} + \vec{F}_e + \vec{F}_c)$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{C, ext \rightarrow i} + \overrightarrow{C'M} \wedge (\vec{F}_e + \vec{F}_c)$$

Comme pour le PFD il faut rajouter les couples des forces inertielles (ou pseudo-forces) afin de correctement décrire la dynamique du point M .