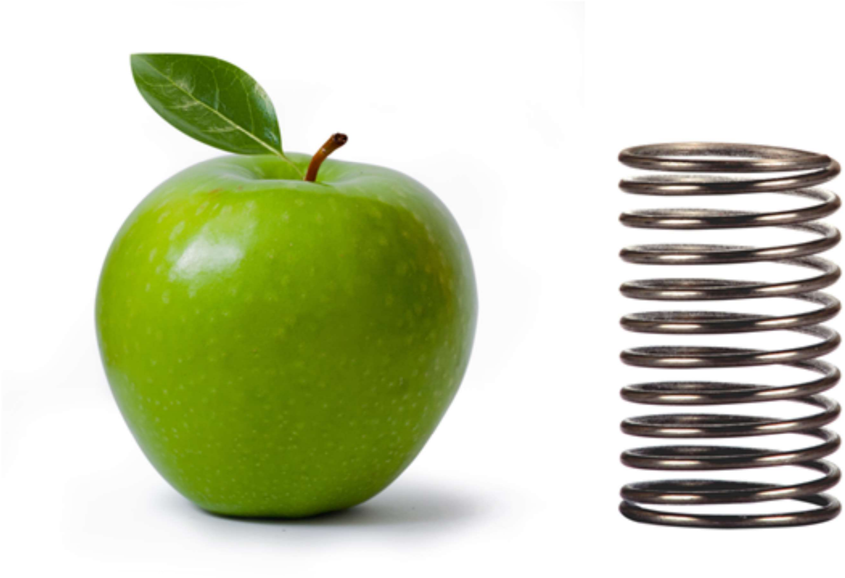
MECANIQUE



CM°3 – Energie potentielle & Travaux virtuels

Objectifs du cours :

Introduire la notion de travail en mécanique, l'utilisation du principe des travaux virtuels et de l'énergie potentielle pour résoudre des problèmes de mécanique statique.

Plan du cours :

- Travail
- Principe des travaux virtuels
- Energies potentielles
- Travaux virtuels et énergies potentielles

Mes commentaires

Notion de travail

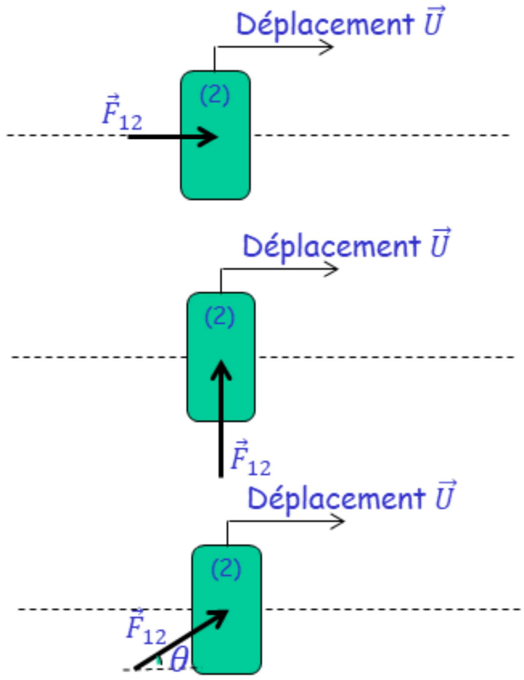
Travail mécanique (J) → $\delta W = \vec{F}.d\vec{x}$

Déplacement (m)

Force (N)

>0 if …

<0 if …



W=

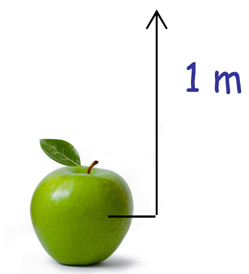
W=

W=

Le **travail** d'une force est l'énergie fournie par cette force lorsque son point d'application se déplace. Il se calcule à l'aide d'un produit scalaire et s'exprime **en Joule** (J).

Questions :

- Donner l'expression du travail pour les 3 cas considérés ci-dessus.
- Quel est le travail à fournir pour élever d'1 mètre une pomme ?

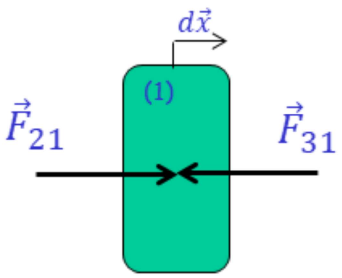


Mes commentaires

Principe des travaux virtuels

$$\sum \delta W_{\overrightarrow{F_{ext \to E}}} = 0$$

Principe des travaux virtuels => Equilibre des forces et des moments (PFS)



Equilibre des résultantes des forces:

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \vec{0}$$

Pour un petit **déplacement virtuel dx**:

$$d\vec{x}.(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}) = \vec{0}\ .d\vec{x}$$

Travaux virtuels:

$$\sum \delta W_{\overrightarrow{F_{ext \to E}}} = \vec{F}_{21}.d\vec{x} + \vec{F}_{31}.d\vec{x} = 0$$

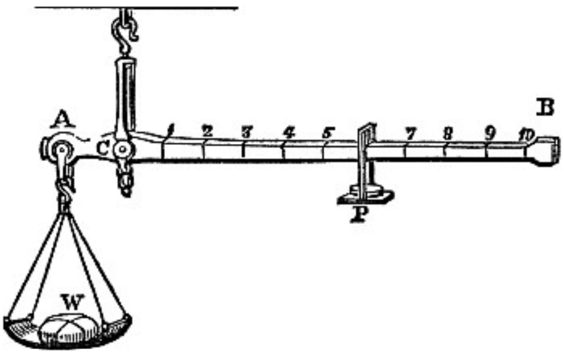
Principe des travaux virtuels :

La somme des travaux appliqués sur un système mécanique est nulle.

- Pour des petits déplacements possibles
- En absence de dissipation, frottement interne (liaisons parfaites)
- En absence de stockage interne non pris en compte dans les travaux évalués.

NB: Les travaux virtuels permettent de retrouver des résultats de statique sans devoir isoler chaque solide du système mécanique considéré.

Mes commentaires

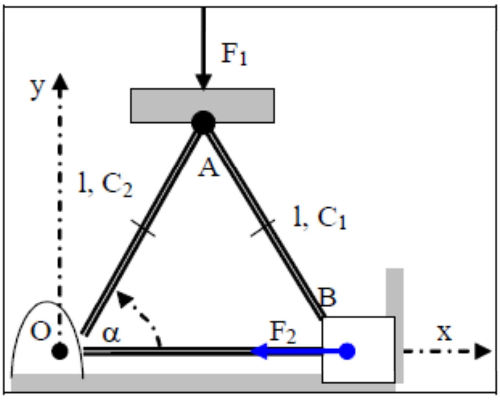


Questions : Retrouver à l'aide du théorème des travaux virtuels les relations entre efforts pour une balance romaine.

Aide au raisonnement :
- Définir le système à isoler
- Répertorier les forces extérieures et leur point d'application
- Déterminer les coordonnées des points d'application des forces
- Calculer les variations élémentaires de ces positions
- Appliquer le théorème des travaux virtuels
- Résoudre

Mes commentaires

Exemples (2)



On appelle *levier à pression* le système de 2 tiges identiques (de même masse m) articulées dont l'une a une extrémité immobile O et l'autre une extrémité B qui peut se déplacer suivant l'axe Ox.
On exerce en A une force verticale F1 dirigée vers le bas.

Questions :

Calculer la force F2 que doit exercer le bâti en B pour que le système soit en équilibre.

Limitons nous au cas particulier important où les liaisons en O, A et B sont parfaites, en l'absence de frottement et en l'absence de glissement.

Utilisez l'aide au raisonnement de l'exemple précédent.

Mes commentaires

Force conservative:

$$\oint \delta W = \oint \vec{F}.d\vec{u} = 0$$

Energie potentielle:

$$\delta E_p = \delta W$$

Travail nécessaire pour contrer la force conservative

➔Travail de F_m pour contrer la gravité

Une force est dite **conservative** lorsque le **travail produit par cette force est indépendant du chemin suivi par son point d'action**. Son travail sur une boucle fermée est nulle.

Exemple

- de force conservative : gravité
- de force non conservative : frottement

Il existe un champ scalaire E_p, aussi appelé ***énergie potentielle***, tel que la force s'écrit

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\ Ep$$

Si le point d'application d'une force conservative se déplace d'un point A à un point B, le travail W de la force en question s'obtient simplement à partir du potentiel E_p : **$W=E_p(A)-E_p(B)$**.

Mes commentaires

Expressions: Energies potentielles

Energie potentielle de gravité:

Energie potentielle élastique:

Ressort de raideur k

Exercice: Donner les expressions des énergies potentielles de gravité et d'élasticité.

Mes commentaires

Travaux virtuels à partir de l'énergie potentielle

$$\underbrace{\sum \delta W_{\overrightarrow{F}_{ext\to E}}}_{\text{Travail des forces extérieures}} = \underbrace{\sum \delta W_{losses}}_{\text{Travail des forces non conservatrices (pertes)}} + \underbrace{\sum \delta E_{p_k}}_{\text{Energie potentielle globale (forces conservatrices)}}$$

SI pas de forces extérieures ni de pertes: $\delta E_p = 0$

Possibles positions d'équilibre : SI $E_p = f(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots)$

$$\delta E_p = \frac{\partial E_p}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial E_p}{\partial u_2} du_2 + \cdots = 0 \qquad \forall\ du_1 \text{ et } du_2$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial u_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_p}{\partial u_2} = 0$$

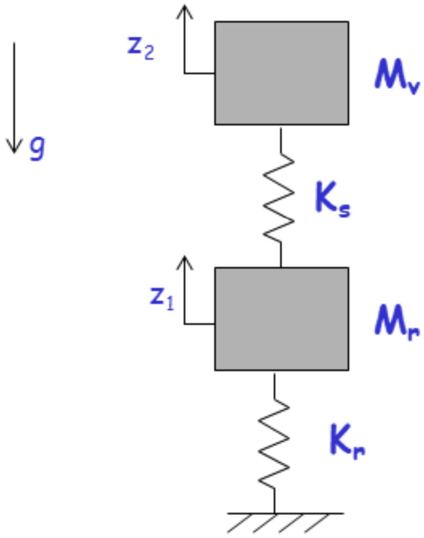
Il est possible d'étendre le principe des travaux virtuels en ajoutant l'énergie dissipée par les pertes ou stockée dans le système sous forme d'énergie potentielle.

Pour un système isolé soumis à aucune force externe et sans perte, l'énergie potentielle globale des forces conservatives se conserve.

Il est alors possible de déterminer les équations caractéristiques de l'équilibre du système (u1 et u2) comme indiqué ci-dessus.

Mes commentaires

Exemple: Equilibre d’une suspension



Exercice : Déterminer les expressions des positions d’équilibre (z1 et z2) d’une suspension à l’aide de l’énergie potentielle du système.

On suppose que le système est isolé soumis à aucune force externe et sans perte.

<u>Aide au raisonnement:</u>

- Ecrire les expressions des énergies potentielles de la roue et de la suspension
- Appliquer le théorème de l’énergie potentielle
- Résoudre

Mes commentaires