Correction du contrôle de ASNL - 02/12/13

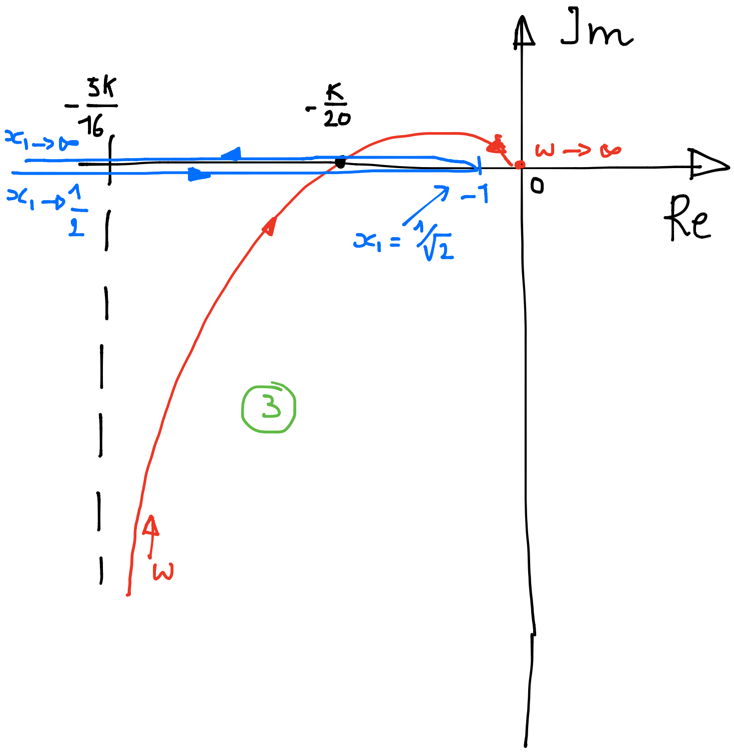
Exercice 1 :

$$KG(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)(4+j\omega)} = -\frac{5K}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)} - \frac{jK(4-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(16+\omega^2)}$$

$$N(x_1) = \frac{1}{x_1}\sqrt{1-\frac{1}{4x_1^2}}, \quad C(x_1) = -\frac{1}{N(x_1)} = \frac{2x_1^2}{\sqrt{4x_1^2-1}}$$

$$\frac{dC(x_1)}{dx_1} = -\frac{\sqrt{4x_1^2-1}\times 4x_1 - \frac{2x_1^2\times 8x_1}{2\sqrt{4x_1^2-1}}}{4x_1^2-1}, \quad \frac{dC(x_1)}{dx_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 \text{ et } \lim_{x_1\to\infty} C(x_1) = -\infty \quad \lim_{x_1\to 1/2} C(x_1) = -\infty$$



$$-\frac{2x_1^2}{\sqrt{4x_1^2-1}} = -\frac{K}{20} \Rightarrow$$

$$1600x_1^4 - 4K^2x_1^2 + K^2 = 0$$

$$\Delta' = 4K^2(K^2-400), \quad K \geq 20$$

$$x_{10}^2 = \frac{K^2}{800}\sqrt{1\pm\sqrt{1-\frac{400}{K^2}}}$$

2

$\omega_0 = 2\ rd/s$

2 auto-oscillations pour $K \geq 20$, seule celle d'amplitude la plus élevée est stable.

1

Exercice 2 :

Pour les deux systèmes, les points d'équilibre correspondent respectivement à : $(x_{e_1}, x_{e_2}) = (0,0)$ et $(y_{e_1}, y_{e_2}) = (0,0)$. 1

Pour le premier, on obtient par le modèle linéarisé

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 + x_2^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -1 - 2x_1x_2 & -x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix} \Delta x$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x$$

2

Pour le second

$$\Delta \dot{y} = \begin{bmatrix} 3y_1^2 + y_2^2 & 1 + 2y_1y_2 \\ -1 + 2y_1y_2 & y_1^2 + 3y_2^2 \end{bmatrix} \Delta y$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Delta y$$

Les deux modèles linéarisés sont en limite de stabilité. On ne peut pas conclure. Considérons alors

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow \dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = \cancel{x_1x_2} - x_1^2(x_1^2+x_2^2) - \cancel{x_1x_2} - x_2^2(x_1^2+x_2^2)$$

$$= -(x_1^2+x_2^2)^2 < 0 \quad \text{stabilité asymptotique}$$

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \Rightarrow \dot{V} = y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2 = y_1y_2 + y_1^2(y_1^2+y_2^2) - y_1y_2 + y_2^2(y_1^2+y_2^2)$$

$$= (y_1^2+y_2^2)^2 \quad \text{Instabilité}$$

1