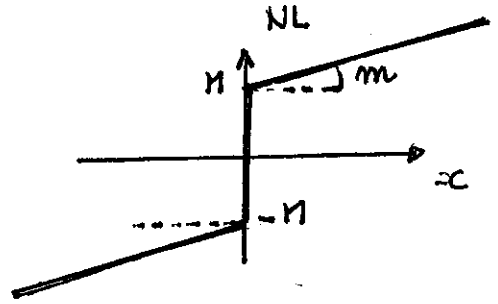
Corrigé Examen 2017

Exercice 1 :

1.)



$m = 0$ relais idéal

2.)

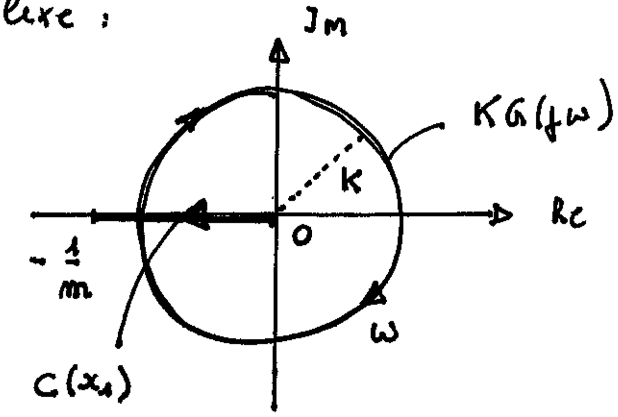
$$C(x_1) = -\frac{1}{N(x_1)} = -\frac{\pi x_1}{4M + m\pi x_1}$$

$x_1 \to 0 \quad C(x_1) \to 0$

$x_1 \to \infty \quad C(x_1) \to -\frac{1}{m}$

$$KG(j\omega) = Ke^{-Tj\omega} = K\cos T\omega - jK\sin T\omega$$

Dans le plan complexe :



3.) L'existence d'auto-oscillations dépend des solutions de l'équation :

$$K(\cos\omega T - j\sin\omega T) = -\frac{\pi x_1}{4M + m\pi x_1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} K\cos\omega T = -\dfrac{\pi x_1}{4M + m\pi x_1} & (1) \\ K\sin\omega T = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow \omega T = k\pi$ Si $k = 2n \quad \cos\omega T = 1$

Si $k = 2n+1 \quad \cos\omega T = -1$

donc $\cos\omega T = (-1)^k$

Et donc

$$(-1)^k K = -\frac{\pi x_1}{4M + m\pi x_1}$$

$$(-1)^k K \left(4M + m\pi x_1\right) = -\pi x_1$$

$$4(-1)^k K M = \left(-\pi - (-1)^k m K \pi\right) x_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{x_{10} = \frac{(-1)^k 4KM}{\pi\left(-1 - (-1)^k m K\right)}}$$

- Si $k = 2p$ $\quad x_{10} = -\frac{4MK}{\pi(1+mK)} < 0$ Pas d'auto-oscillation

- Si $k = 2p+1$ $\quad x_{10} = -\frac{4MK}{\pi(-1+mK)}$

Si $-1 + mK < 0 \iff K < \frac{1}{m}$

1 auto-oscillations caractérisées par

$$x_{10} = \frac{4MK}{\pi(1-mK)}$$

$$\omega_0 = \frac{(2p+1)\pi}{T} \quad p = 0, 1, \dots$$

Si $K > \frac{1}{m}$ $\quad x_{10} < 0$ pas d'auto oscillation

Si $K = \frac{1}{m}$ $\quad x_{10} \to \infty$

4.) Pour $0 < K < \frac{1}{m}$ auto-oscillations stables car en parcourant $KG(j\omega)$ dans le sens de $\omega \nearrow$ on laisse les $x_1 \nearrow$ à gauche

Exercice 2 :

1.) $x_1 = x \qquad x_2 = \frac{dx}{dt}$

$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_2 = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_1 + a(x_1^2 - 1)x_2$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} x_2 \\ -x_1 + a(x_1^2 - 1)x_2 \end{cases}$$

2.) Les points d'équilibre vérifient

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + a(x_1^2 - 1)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_{1e}, x_{2e}) = (0, 0) = x_e$$

$$DF(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2a\,x_1 x_2 & a(x_1^2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$DF(x_e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } a > 0 & (0,0) \text{ Asympt. stable} \\ \text{si } a < 0 & (0,0) \text{ Instable} \\ \text{si } a = 0 & (0,0) \ ? \end{cases}$$

3.) Prenons par exemple la fonction de Lyapunov candidate

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T x$$

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^T x + \frac{1}{2} x^T \dot{x} = x^T \dot{x}$$

$$= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + a(x_1^2 - 1)x_2 \end{bmatrix}$$

$$= a x_2^2 (x_1^2 - 1) < 0$$

si $a > 0$ et si $x_1^2 - 1 < 0$

$\dot{V}(x) < 0$ et le Σ est asymptotiquement stable

Un estimation du domaine d'attraction est :

$$x_1^2 + x_2^2 < 1$$