Correction Examen 10/01/2017

Exercice N°1

1) Les points d'équilibre sont solution de :

$$\begin{cases} y(x-1)=0 \\ x-y^2+ay=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ou } x=1 \\ x-y^2+ay=0 \end{cases}$$

Si $y=0$ alors $x=0$ $\quad x_{e1}=(0,0)$

Si $x=1$ alors $1-y^2+ay=0 \Rightarrow y^2-ay-1=0$

$\Delta = a^2+4 \quad y_1 = \frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$

$y_2 = \frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$

3 points d'équilibre : $x_{e_1}=(0,0)$, $x_{e_2}=(1,y_1)$ et $x_{e_3}=(1,y_2)$

La jacobienne est donnée par

$$DF(x) = \begin{bmatrix} y & x-1 \\ 1 & -2y+a \end{bmatrix}$$

$$DF(x_{e_1}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2-a\lambda+1=0$$

$\Delta = a^2-4<0 \quad a\in\,]-2,2[$

$\lambda_1 = \frac{a}{2}+j\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$

$\lambda_2 = \frac{a}{2}-j\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$

$a=2$ Noeud instable , $0<a<2$ foyer instable

$a=-2$ Noeud stable , $-2<a<0$ foyer stable

$a=0$ on ne peut pas conclure.

$$DF(x_{e_2}) = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{a^2+4} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = y_1 > 0 \ \forall a$

$\lambda_2 = -\sqrt{a^2+4} < 0 \ \forall a$ $\quad$ col

$$DF(x_{e_3}) = \begin{bmatrix} y_2 & 0 \\ 1 & +\sqrt{a^2+4} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = y_2 < 0 \ \forall a$

$\lambda_2 = \sqrt{a^2+4} > 0 \ \forall a$ $\quad$ col

2) $\underline{a=0}$

a) $DF(x_{e_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$

$DF(x_{e_3}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2$

b)

$\underline{x_{e_2} \text{ vecteurs propres}}$

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad -x+3y=0 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -2 \quad x = 0 \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

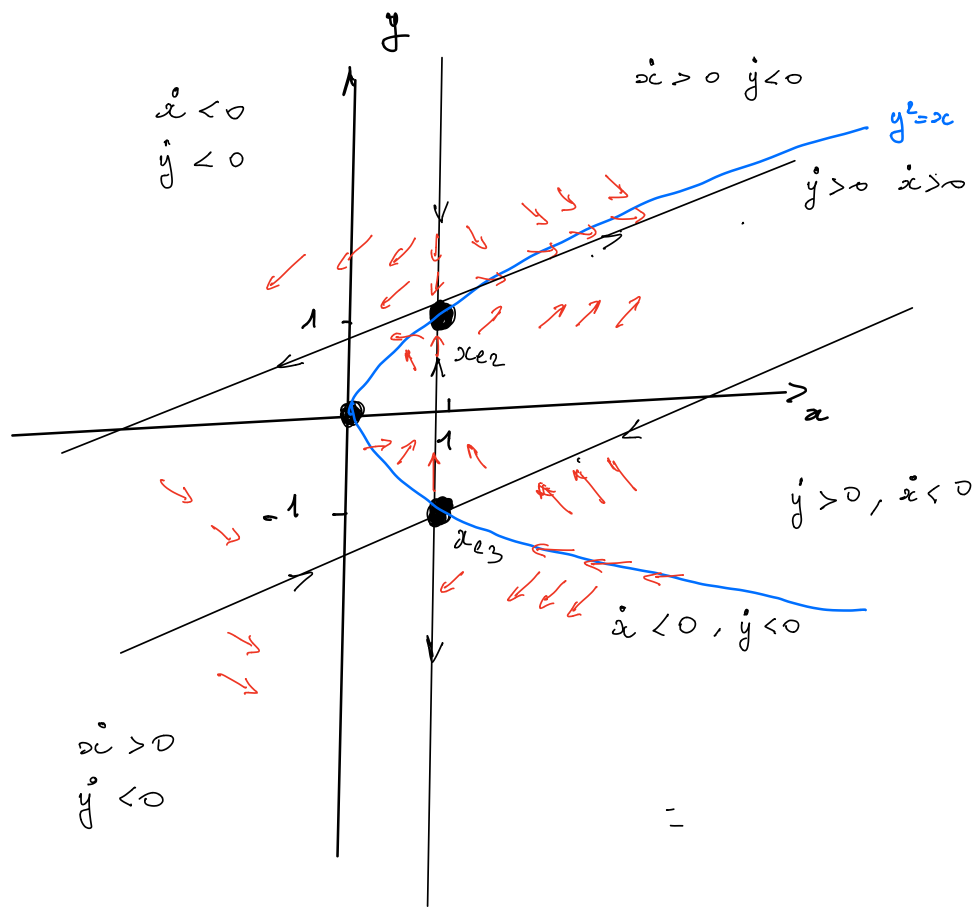
$\underline{x_{e_3} \text{ vecteurs propres}}$

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

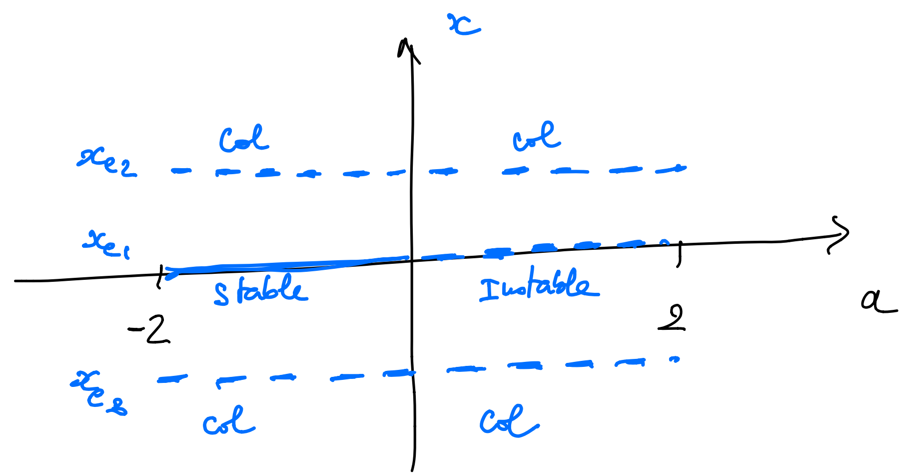
$\lambda_1 = -1 \quad x-3y=0 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \quad x = 0 \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

c)



3)



Exercice N°2

1) Les points d'équilibre sont donnés par

$$\begin{cases} 3y^2 - x = 0 \\ y - 3x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y^2 \\ y = 3 \times (3y^2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y^2 \\ y = 27y^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y^2 \\ y(1-27y^3) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_{e_1} = (0, 0) \qquad x_{e_2} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$DF(x) = \begin{bmatrix} -1 & 6y \\ -6x & 1 \end{bmatrix}$$

$DF(x_{e_1}) \to \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ col

$DF(x_{e_2}) \to \lambda^2 - 1 + 4 = 0$ on ne peut pas conclure

2) Soit $H = x^3 + y^3 - xy$ obtenu en posant

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} = 3y^2 - x \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = y - 3x^2 \end{cases} \Rightarrow H(x, y) = x^3 + y^3 - xy$$

On a

$$\frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = (3x^2 - y)(3y^2 - x) + (3y^2 - x)(y - 3x^2)$$
$$= 9\cancel{x^2y^2} - \cancel{3x^3} - \cancel{3y^3} + \cancel{xy} + \cancel{3y^3} - 9\cancel{x^2y^2} - \cancel{xy} + \cancel{3x^3}$$
$$= 0$$

Le système est Hamiltonien.

Il est donc conservatif $\Rightarrow$ x_{e_2} est un centre