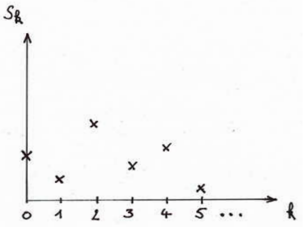
Quelques éléments sur les systèmes temps-discret ou échantillonnés

Transformée en z

Considérons une série numérique $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ représentée sur la figure suivante



Definition

La transformée en z de $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est la série définie par

$$F(z) = \mathcal{Z}[\{s_k\}] = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Propriétés de la transformée en z

1. Linéarité

$$\mathcal{Z}[\alpha\{f_k\} + \beta\{g_k\}] = \alpha\,\mathcal{Z}[\{f_k\}] + \beta\,\mathcal{Z}[\{g_k\}]$$

2. Décalage arrière

$$\mathcal{Z}[\{f_{k-l}\}] = z^{-l}\mathcal{Z}[\{f_k\}] = z^{-l}F(z)$$

3. Décalage avant

$$\mathcal{Z}[\{f_{k+l}\}] = z^{l}\left[\mathcal{Z}[\{f_k\}] - \sum_{i=0}^{l-1} f_i\, z^{-i}\right]$$

4. Valeur initiale

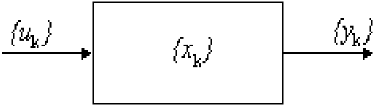
$$f_0 = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

5. Valeur finale

$$\lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\,F(z)$$

Equation récurrente et Fonction de transfert

Soit le système linéaire invariant temps discret représenté sur la figure suivante



Considérons le modèle équation récurrente de ce système, soit

$$a_n\, y_{k+n} + \cdots + a_1\, y_{k+1} + a_0\, y_k = b_m\, u_{k+m} + \cdots + b_1\, u_{k+1} + b_0\, u_k \qquad m \leqslant n$$

avec les conditions initiales $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

Equation récurrente et Fonction de transfert

La transformée en z de l'équation récurrente est donnée par

$$\underbrace{(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n)}_{D(z)} Y(z) = \underbrace{(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_m z^m)}_{N(z)} Y(z) + I(z)$$

avec

$$\begin{aligned} I(z) &= 0 \text{ si les conditions initiales sont nulles} \\ &\neq 0 \text{ si les conditions initiales sont non nulles} \end{aligned}$$

et

$$\boxed{Y(z) = \underbrace{\frac{N(z)}{D(z)}}_{\substack{\text{Fonction} \\ \text{de transfert}}} U(z) + \frac{I(z)}{D(z)}}$$

Equation récurrente et Fonction de transfert

La fonction de transfert peut encore s'écrire

$$\boxed{G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m}{a_n} \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(z - p_i)}}$$

where

- Les racines du numérateur z_i sont les zéros du système
- Les racines du numérateur p_i sont les pôles dus système
- n est l'ordre
- $D(z) = 0$ est le polynôme caractéristique

Echantillonnage : transformée de Laplace et transformée en z

Echantillonnons un signal $x_c(t)$. Si $f_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage, elle doit être deux fois supérieure à la plus haute fréquence contenue dans $x_c(t)$.

La représentation du signal échantillonné dans le domaine temporel s'écrit

$$x_c^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_c(kT_e)\delta(t - kT_e) \triangleq x(t)$$

La transformation de Laplace de $x(t)$ est alors

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_c(kT_e)\exp(-kT_e s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_c(kT_e)\left(\exp(T_e s)\right)^{-k}$$

En posant $s_k = x_c(kT_e)$ et $z = \exp(T_e s)$, on a la transformée en z de $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

$$S(z) \triangleq X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k z^{-k}$$

La relation fondamentale entre s et z est

$$\boxed{z = \exp(T_e s)}$$

Fonction de transfert échantillonnée

Considérons un système temps continu décrit par $G_c(s)$. Pour obtenir la fonction de transfert du système échantillonné $G(z)$, une méthode consiste à chercher une approximation de la variable s en fonction de la variable z, soit $s = f(z)$. On a alors

$$G(z) = G_c(f(z)) = (G_c \circ f)(z)$$

Parmi les approximations les plus utilisées, on a

1. **Discrétisation avant (forward)**

$$\boxed{z = \exp(T_e s) \approx 1 + T_e s \rightarrow s \approx \frac{z-1}{T_e}}$$

2. **Discrétisation arrière (backward)**

$$\boxed{z = \exp(T_e s) = \frac{1}{\exp(-T_e s)} \approx \frac{1}{1 - T_e s} \rightarrow s \approx \frac{z-1}{T_e z}}$$

3. **Bilinear approximation (Tustin)**

$$\boxed{z = \exp(T_e s) = \frac{\exp(T_e s/2)}{\exp(-T_e s/2)} \approx \frac{1 + T_e s/2}{1 - T_e s/2} \rightarrow s \approx \frac{2}{T_e} \ \frac{z-1}{z+1}}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE LAAS CNRS

Stabilité

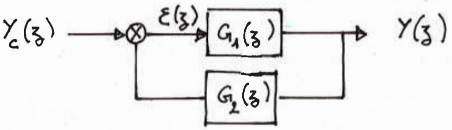
L'opération d'échantillonnage n'affecte pas la stabilité en boucle ouverte puisqu'il s'agit en fait d'une manière de l'observer.

Rappelons que l'on a $z = \exp(T_e s)$ et si $s = x + jy$, alors on a $z = \exp(x)\exp(jy)$ $\Rightarrow |z| = \exp(x) < 1$

Si le système temps continu est stable asymptotiquement, alors $\Re e(s) < 0$, soit $x < 0$, ce qui implique en effet que $|z| < 1$.

> Un système temps discret sera stable asymptotiquement si les pôles z_i, $i = 1, \ldots, n$ vérifient $|z_i| < 1,\ i = 1, \ldots, n$.

Précision en boucle fermée



Pour le système bouclé ci-dessus, l'erreur est donnée par

$$\varepsilon(z) = \frac{Y_c(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$$

L'erreur en régime permanent (si ε bornée) est donnée par (théorème de la valeur finale)

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \frac{Y_c(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$$

Si Y_c est une échelon d'amplitude e_0, $Y_c(z) = e_0 z/(z-1)$,on a

$$\varepsilon(\infty) = \frac{e_0}{1 + G_1(1)G_2(1)}$$

L'erreur est nulle si $G_1(1)G_2(1) \to \infty$, c'est à dire si $G_1(z)G_2(z)$ possède au moins une intégration (pôles à 1).