Correction DS ASNL

2022-2023
4AE-SE

6 janvier 2023

Exercice 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = a x_1^2 - x_2 \end{cases} \qquad a < 0$$

① pt d'équilibre
$$\begin{cases} x_1 (a - x_2) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad x_2 = a \\ a x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = 0 \qquad\qquad x_1^2 = 1$$

$\Rightarrow$ 3 pt d'eq : $(0,0)$ $(1, a)$ $(-1, a)$

linéarisation de $\dot{x} = f(x)$ autour des pt d'eq x^*

$$A = \begin{pmatrix} a - x_2 & -x_1 \\ 2a x_1 & -1 \end{pmatrix}_{x = x^*}$$

autour de $(0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{noeud stable}$$

autour de $(1, a)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2a & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda + 1) + 2a$$
$$= \lambda^2 + \lambda + 2a$$

$\Delta = 1 - 8a > 0 \quad \forall a < 0$

$$VP = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8a}}{2}$$ $\longrightarrow$ 2 vp réelles de signe opposé

$\longrightarrow$ pt selle

autour de $(-1, a)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(\lambda \mathbb{I} - A) = \lambda(\lambda+1) + 2a$$

iden cas précédent

(2) autour de l'origine, le système linéarisé s'écrit

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$ $\rightarrow$ les vp sont à partie réelle negative.

Puisque le linéarisé est AS $\rightarrow$ le système nonlinéaire est aussi AS (localement) d'après la 1re methode de Lyapunov

(3) l'origine est AS mais ne pourra pas l'être globalement puisqu'il existe d'autres points d'équilibre

(4) $$V(x) = \frac{1}{2} P_1 x_1^2 + \frac{1}{2} P_2 x_2^2 > 0 \qquad \forall x \neq 0$$

$$\dot{V}(x) = P_1 x_1 \dot{x}_1 + P_2 x_2 \dot{x}_2$$

$$= P_1 a x_1^2 - P_1 x_1^2 x_2 + P_2 a x_1^2 x_2 - P_2 x_2^2$$

$$= \left(P_1 a + x_2 (P_2 a - P_1)\right) x_1^2 - P_2 x_2^2$$

$< 0 \quad \forall x \neq 0$ et $\quad P_1 a + x_2(P_2 a - P_1) < 0$

V est donc bien une fonction de Lyapunov pour le système nonlinéaire autour de l'origine

pour $x_2 > \dfrac{-P_1 a}{P_2 a - P_1}$

⑤ $a = -2$

$P_1 = P_2 = 1$

dans ce cas il faut $x_2 > -\frac{2}{3}$

equipotentielle : $V(x) = c \iff \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 = c$

$x_1^2 + x_2^2 = 2c$

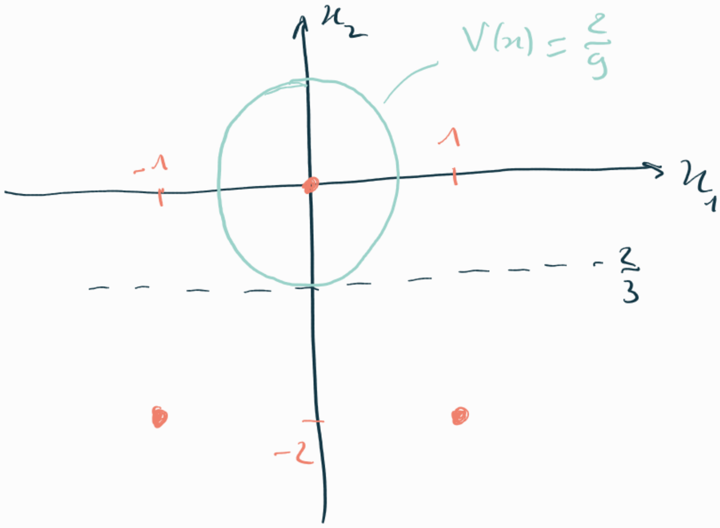
↳ cercle de rayon $\sqrt{2c}$

le cercle le plus grand est donc tq $\sqrt{2c} < \frac{2}{3}$

l'equipotentielle la plus grande est donc

$c = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9} = 0{,}22$

⑥



Exercice 2

(2) $$C(A) = -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\frac{A\pi}{4M}}{\sqrt{1-\frac{1}{A^2}} - j\frac{1}{A}}$$

$$= -\frac{\frac{A\pi}{4M}}{1-\frac{1}{A^2}+\frac{1}{A^2}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{A^2}} + j\frac{1}{A}\right)$$

$$= -\frac{A\pi}{4M}\sqrt{1-\frac{1}{A^2}} - j\frac{\pi}{4M}$$

pour $A \geq 1$

(3) $$G(j\omega) = \frac{4}{j\omega(j\omega+3)} = \frac{4}{-\omega^2 + 3\omega j}$$

$$= \frac{-4\omega^2}{\omega^4+9\omega^2} - j\frac{12\omega}{\omega^4+9\omega^2}$$

$\omega \to +\infty$ $\quad |G(j\omega)| \to 0$ $\quad \arg G(j\omega) \to -\pi$

$\omega \to 0$ $\quad |G(j\omega)| \to +\infty$ $\quad \arg G(j\omega) \to -\frac{\pi}{2}$

$\omega \to 0$ $\quad Im \to -\infty$

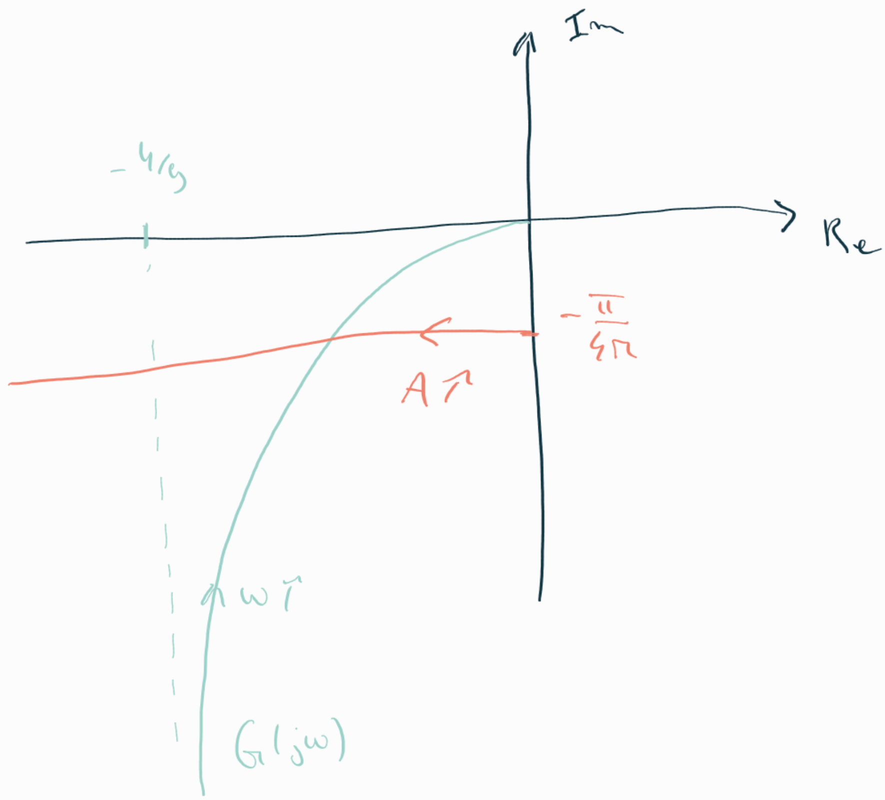
$Re \to -\frac{4}{9}$

lieu critique $C(A)$

$A = 1$ $\quad C(A) = -j\frac{\pi}{4M}$

$A \to +\infty$ $\quad C(A) \to$ $Re \to -\infty$

$Im \to -\frac{\pi}{4M}$



④ il y a une intersection → existence d'un cycle limite

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

$$\frac{-4\omega^2}{\omega^4 + 9\omega^2} - j\frac{12\omega}{\omega^4 + 9\omega^2} = -\frac{A\pi}{4M}\sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} - j\frac{\pi}{4M}$$

par identification des parties imaginaires

$$\frac{12}{\omega^3 + 9\omega} = \frac{\pi}{4M} \iff \frac{\pi}{4M}\omega^3 + \frac{9\pi}{4M}\omega - 12 = 0$$

↳ on trouve ω_0

par identification des parties réelles

$$\frac{4\omega_0^2}{\omega_0^4 + 9\omega_0^2} = \frac{A\pi}{4M}\sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} \Rightarrow B^2 = A^2\left(1 - \frac{1}{A^2}\right)$$

$A^2 - 1 - \beta^2 = 0 \longrightarrow$ on trouve A_0

(5) D'après le critère graphique de Loeb, le cycle limite est stable. En effet, au point d'intersection lorsqu'on parcourt le lieu de $G(j\omega)$ dans le sens des $\omega \nearrow$, la direction des $A \nearrow$ le long du lieu critique est vers la gauche.

(1)