

Dynamique du solide

Damien Allain
allain@insa-toulouse.fr

Alice Guilles des Buttes
guillede@insa-toulouse.fr

Thierry Loubet
tloubet@insa-toulouse.fr

Paul Oumaziz
paul.oumaziz@insa-toulouse.fr

Jean-Yves Plantec
plantec@insa-toulouse.fr

Cahier de Travaux Dirigés

Table des matières

TD 1 - Matrice d'inertie d'une hélice d'avion	2
TD 2 - Compresseur d'air JUN-AIR 41	4
TD 3 - Centrifugeuse humaine	7
TD 4 - Mélangeur de peinture	9
TD 5-6 - Table vibrante	11
TD 7-8 - Freinage et blocage des pneus	15
TD 9-10 - Véhicule autonome guidé	17
TD 11-12 - Robot Lola	21
TD 13 - Manège tapis volant	23

TD1 - Matrice d'inertie d'une hélice d'avion

Dans ce TD nous allons étudier la différence entre une hélice bipale et une hélice tripale. Pour cela nous nous intéressons à la matrice d'inertie des deux configurations.

Objectif : Démontrer l'intérêt d'une hélice tripale par rapport à une hélice bipale pour réduire les quantités d'accélération.

On modélise une pale par une plaque mince dont les dimensions sont précisées à la figure 1 : de longueur b , de largeur a . Sa masse surfacique est désignée par ρ . On note $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ la base locale associée à la pale et $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ la base fixe liée à l'avion.

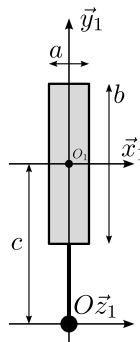


FIGURE 1 – Description de la pale

Question 1. Calcul de la matrice d'inertie d'une pale.

- Justifier que la matrice d'inertie d'une pale exprimée dans la base $\mathcal{B}_1$ de la pale peut se mettre sous la forme :

$$[I_{(O_1, \mathcal{B}_1)}(pale)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

- Déterminer tous les éléments A, B, C de la matrice d'inertie en fonction des dimensions de la pale.
- Ramener la matrice d'inertie de la pale en O : $[I_{(O, \mathcal{B}_1)}(pale)]$. Pour cela on ne remplacera pas A, B et C par les expressions déterminées précédemment.

Nous avons déterminé l'expression de la matrice d'inertie d'une pale. Maintenant nous étudions les matrices d'inertie d'une hélice bipale et d'une hélice tripale.

Question 2. Calcul de la matrice d'inertie d'une hélice bipale.

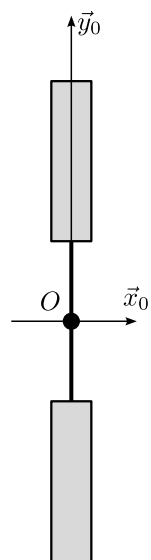
- Déterminer la matrice d'une hélice bipale en O dans la base $\mathcal{B}_0$ en fonction des coefficients A, B , et C .

Question 3. Analyse de la matrice d'inertie d'une hélice tripale.

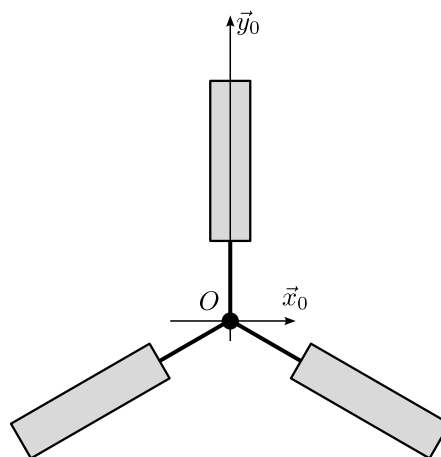
- Proposer une forme générale de la matrice d'inertie en O dans la base $\mathcal{B}_0$ de l'hélice tripale.
- Déterminer le moment d'inertie de l'hélice tripale autour de l'axe $\vec{y}_0$.
- Déterminer de même le moment d'inertie de l'hélice tripale autour de l'axe d'une autre pale.
- Conclure quand à la forme de la matrice d'inertie de l'hélice tripale.

Formule : Afin de déterminer simplement le moment d'inertie I autour d'un axe $\vec{i}$ à partir de la matrice d'inertie $[I_{(O, \mathcal{B}_0)}()]$, il suffit d'appliquer la formule suivante :

$$I = \vec{i} \cdot [I_{(O, \mathcal{B}_0)}()] \vec{i}$$



(a) Configuration bipale



(b) Configuration tripale

TD2 - Compresseur d'air JUN-AIR 41

L'objectif de l'étude consiste à mettre en évidence d'influence des grandeurs dynamiques sur les actions mécaniques de liaison dans le cas du compresseur d'air JUN-AIR 41.

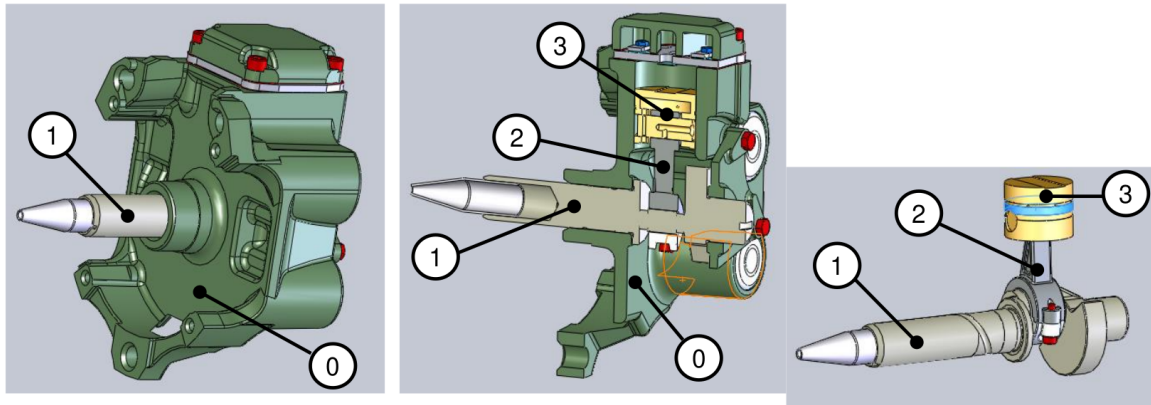


FIGURE 2 – Compresseur JUN-AIR 41

On considère le compresseur JUN-AIR représenté à la figure 2 constitué :

- d'un corps (0) fixe auquel on lui lie un repère galiléen $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- d'un vilebrequin (1) en rotation autour de l'axe $O_1\vec{z}_1$ de paramètre α avec $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. O_1 est un point fixe tel que $\vec{O_0O_1} = h\vec{z}_0$. On pose $\vec{O_1A} = r\vec{x}_1$.
- d'une bielle (2) en liaison pivot en A par rapport à (1) d'axe $A\vec{z}_1$ et en liaison pivot par rapport au piston (3) d'axe $B\vec{z}_1$. La position de la bielle est paramétrée par le paramètre β avec $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$. On pose $\vec{AB} = L\vec{x}_2$.
- d'un piston (3) en mouvement de translation rectiligne par rapport au corps d'axe $O_1\vec{x}_0$. Le paramètre de translation est $\lambda = O_1B$.

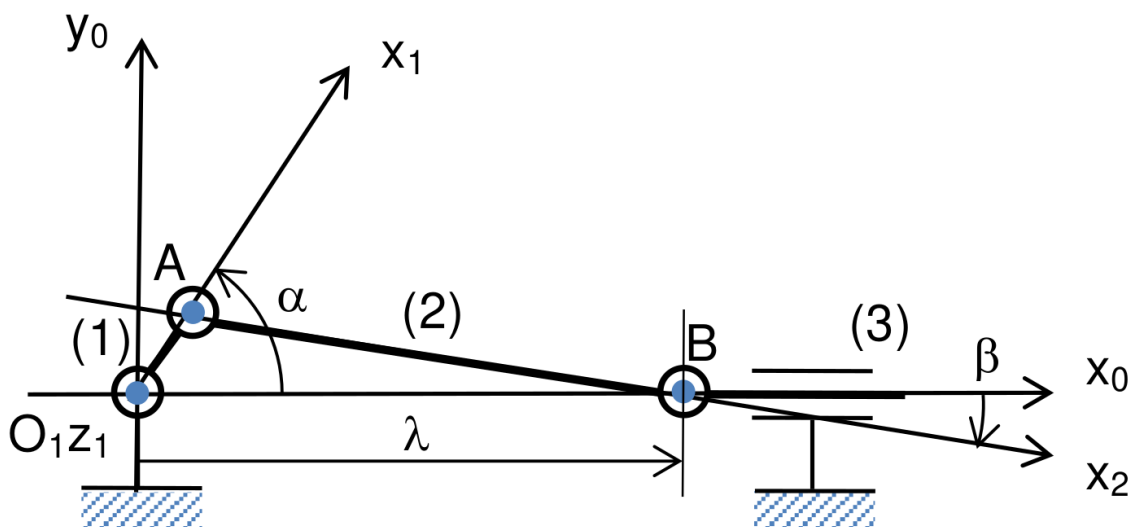


FIGURE 3 – Schéma cinématique du système

1 Équilibrage du vilebrequin

Objectif : Déterminer les grandeurs dynamiques du vilebrequin pour regarder leur incidence sur les efforts de guidage.

La figure 4 montre le modèle CAO du vilebrequin (1) avec le système d'axes associé. Le logiciel de CAO permet d'avoir accès aux propriétés de masse et d'inertie du vilebrequin (Figure 5).

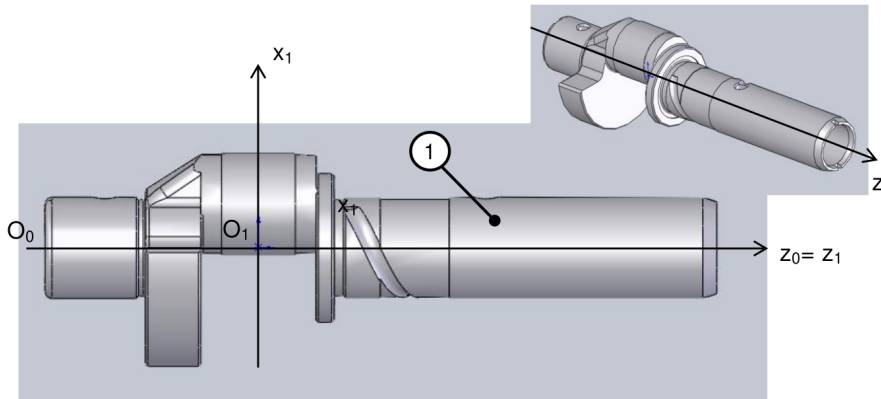


FIGURE 4 – Modèle CAO du vilebrequin

Masse = 0,41 kg
Volume = 58064.39 millimètres cubes
Superficie = 24097.46 millimètres carrés

Centre de gravité G_1 dans le repère $O_1x_1y_1z_1$: (millimètres)

$X_{G1} = -0.66$
 $Y_{G1} = 0.02$
 $Z_{G1} = 9.58$

Axes principaux et moments d'inertie principaux : (kg * millimètres carrés)

Pris au centre de gravité.

$n_x = (1.00, 0.03, 0.00)$ $I_x = 562.92$
 $n_y = (-0.03, -1.00, 0.01)$ $I_y = 568.82$
 $n_z = (0.00, -0.01, 1.00)$ $I_z = 59.19$

Moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés)

Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées $G_1x_1y_1z_1$.

$L_{xx} = 562.39$ $L_{xy} = 0.08$ $L_{xz} = 16.25$
 $L_{yx} = 0.08$ $L_{yy} = 568.82$ $L_{yz} = -0.10$
 $L_{zx} = 16.25$ $L_{zy} = -0.10$ $L_{zz} = 59.72$

Moments d'inertie: (kg * millimètres carrés)

Pris au système de coordonnées de sortie $O_1x_1y_1z_1$.

$I_{xx} = 599.67$ $I_{xy} = 0.07$ $I_{xz} = 13.70$
 $I_{yx} = 0.07$ $I_{yy} = 606.27$ $I_{yz} = -0.00$
 $I_{zx} = 13.70$ $I_{zy} = -0.00$ $I_{zz} = 59.89$

FIGURE 5 – Données d'inertie du vilebrequin

Question 1.

- A partir des données du logiciel CAO, donner la valeur numérique du moment d'inertie du vilebrequin autour de l'axe de rotation $O_1\vec{z}_1$.
- Retrouver par le calcul cette valeur à partir du moment d'inertie par rapport à $G_1\vec{z}_1$, de la masse et des coordonnées du centre de gravité de (1) données sur la figure 5.
- Cet axe de rotation est-il un axe principal d'inertie ?

On donne le paramétrage d vilebrequin (1) par rapport au corps (0) (Figure 6). Finalement on néglige la valeur Y_{G_1} du centre d'inertie G_1 et on pose $\overrightarrow{O_1 G_1} = \begin{matrix} X_{G_1} \\ 0 \\ Z_{G_1} \end{matrix}_{B_1}$. La masse du vilebrequin est notée M_1 . On suppose qu'il tourne à vitesse constante $\dot{\alpha} = \omega = \text{cste}$. On note la matrice d'inertie du vilebrequin au point G_1 :

$$[I_{(G_1, B_1)}((1))] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{B_1}$$

(On néglige les produits d'inertie L_{yz} et L_{xy}).

On donne $O_1 A = r = 9.5 \text{ mm}$.

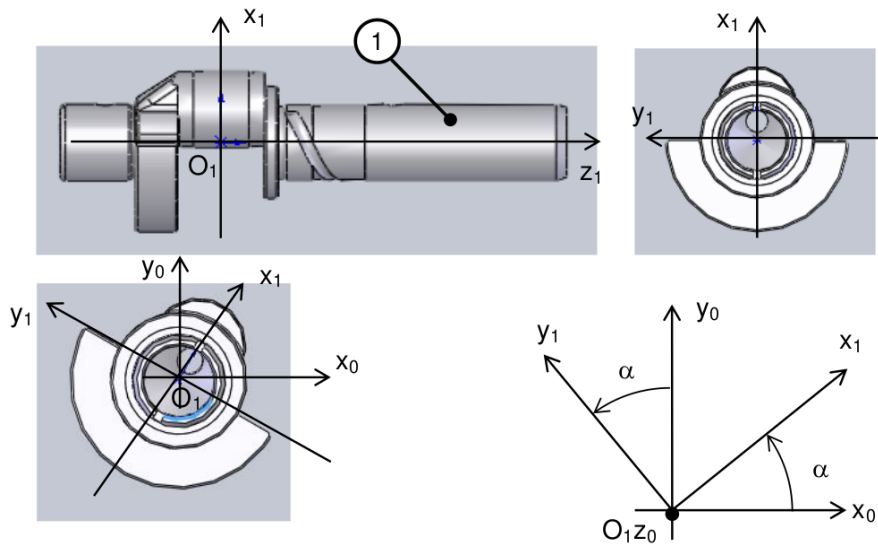


FIGURE 6 – Paramétrage du vilebrequin

Question 2. Donner l'expression de la résultante cinétique de (1) par rapport à (0) : $\vec{R}_c(1/0)$. Faire l'application numérique pour une vitesse de rotation de 3000 tr/min.

Question 3. Donner l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(1/0)$ de (1) par rapport à (0) en O_1 . Faire l'application numérique pour une vitesse de rotation de 3000 tr/min.

TD 3 - Centrifugeuse humaine

L'élargissement du domaine de vol des avions de combat modernes soumet les pilotes de chasse à des niveaux d'accélération de plus en plus élevés. L'accélération ressentie par le pilote est généralement exprimée en "équivalent" pesanteur noté g ($1g = 9,81 \text{ m/s}^2$). Dans le cadre de l'entraînement physiologique des pilotes, l'utilisation d'une centrifugeuse humaine est un moyen avantageux de recréer au niveau du sol, l'accélération subie en opération. La figure 1 présente une centrifugeuse humaine où l'on reconnaît une structure cinématique ouverte à quatre corps (support, bras, anneau et nacelle) assemblés par liaison pivot.

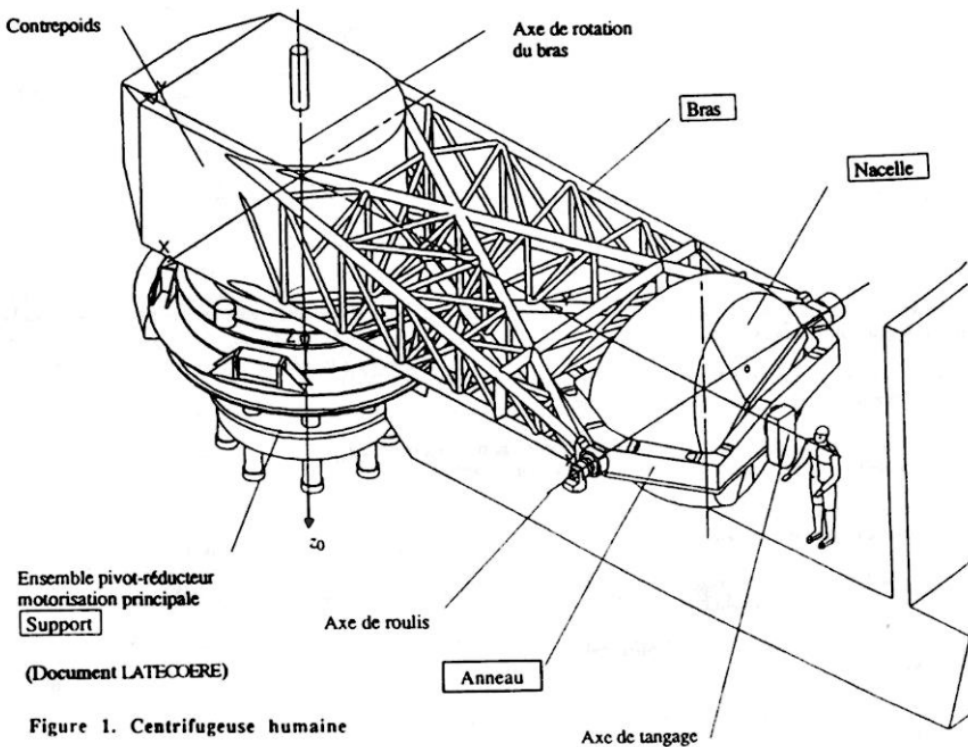


FIGURE 7 – Centrifugeuse humaine

Les consignes de position ou de vitesse à appliquer aux liaisons sont déduites de l'accélération à reproduire. Chaque liaison est alors motorisée par un actionneur qui doit être asservi à la consigne correspondante et insensible aux diverses perturbations (couple de pesanteur, couplages inertiels, frottements aux liaisons...).

La vitesse de rotation du bras ($\omega = \dot{\psi}$) détermine l'intensité de l'accélération imposée au pilote. L'orientation de la nacelle en roulis (θ) et tangage (ϕ) fixe la direction de l'accélération.

La figure 8a représente le modèle de la centrifugeuse. Elle est constituée de :

- un bras (1) de longueur $OI = R$ en liaison pivot d'axe Oz_0 par rapport au bâti (0). Sa position est paramétrée par l'angle ψ .
- d'un anneau (2) en liaison pivot d'axe $I\vec{x}_1$ et de paramètre θ de rotation par rapport au bras (1) (roulis).
- d'une nacelle (3) dans laquelle prend place le pilote, en liaison pivot d'axe $I\vec{y}_2$ et de paramètre ϕ de rotation par rapport à l'anneau (2) (tangage). On notera m_3 la masse cumulée de la nacelle et du pilote.

Chaque liaison pivot est actionnée selon l'axe de la liaison par un moteur. La matrice d'inertie de la nacelle au point I (centre d'inertie de 3), exprimée dans la base $\mathcal{B}_2 (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est :

$$[I_{(I, \mathcal{B}_2)}(3)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

L'actionneur de tangage est essentiellement dimensionné par les couples qu'il doit fournir durant les phases d'accélération du bras. La vitesse du bras sera donc considérée comme variable.

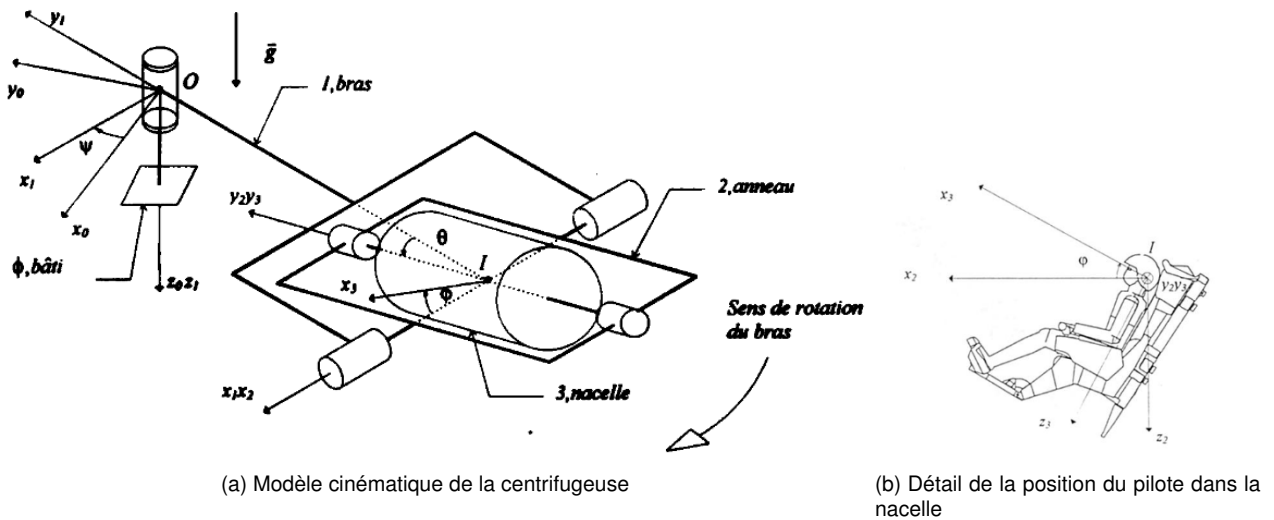


FIGURE 8 – Modèles cinématiques du système

2 Cinématique

Objectif : L'objectif est de déterminer l'expression de la vitesse et l'accélération du pilote (point I dans son mouvement de 3 par rapport à 0). En effet, le vecteur caractérisant le nombre de g s'appliquant au pilote durant l'exercice est $\vec{G} = \vec{g} - \vec{a}_I(3/0)$ où $\vec{g}$ est l'accélération de pesanteur $\vec{g} = g\vec{z}_0$.

Question 1. Déterminer l'expression des vecteurs vitesse de rotation des différents solides par rapport à 0.

Question 2. Déterminer l'expression de la vitesse et de l'accélération du point I dans le mouvement de 3 par rapport à 0.

3 Cinétique et dynamique

Objectif : Déterminer l'expression des torseurs cinétiques et dynamique du pilote.

Question 3. Déterminer l'expression du torseur cinétique du solide 3 exprimé au point I .

Question 4. Déterminer l'expression du torseur dynamique du solide 3 exprimé au point I .

TD 4 - Mélangeur de peinture

On désire à partir d'une étude dynamique évaluer les efforts de serrage nécessaires au maintien d'un pot de colle ou de résine par les plateaux lors du mélange de ce pot dans un mélangeur industriel (Figure 1). Le mélange de la résine dans un pot s'obtient par les rotations combinées du pot sur lui-même autour de deux axes perpendiculaires en O, ce qui permet d'obtenir rapidement un mélange homogène. Le pot de résine est ainsi mis en rotation autour de son axe de symétrie que l'on appellera axe longitudinal et simultanément autour de son axe transversal.



Présentation générale du mélangeur

La modélisation du mélangeur utilisée est définie sur la Figure 2. Elle utilise 5 solides : le bâti (1), le moyeu principal (2), le pot de résine (4), le plateau inférieur (3i) et le plateau supérieur (3s). Tous ces solides sont supposés indéformables. Le repère $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est supposé galiléen. Dans un premier temps, les plateaux (3s) et (3i) seront considérés comme des solides de masse et d'inertie négligeables.

- Le moyeu principal (2) est en liaison pivot parfaite par rapport au bâti d'axe $(O, \vec{x}_1)$. On définit le paramètre angulaire $\alpha = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. Le repère $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est lié à la pièce (2). Par symétrie de la pièce, le centre de gravité G_2 de (2) est situé sur l'axe $(O, \vec{x}_1)$. La matrice d'inertie du moyeu principal (2) en O est défini par :

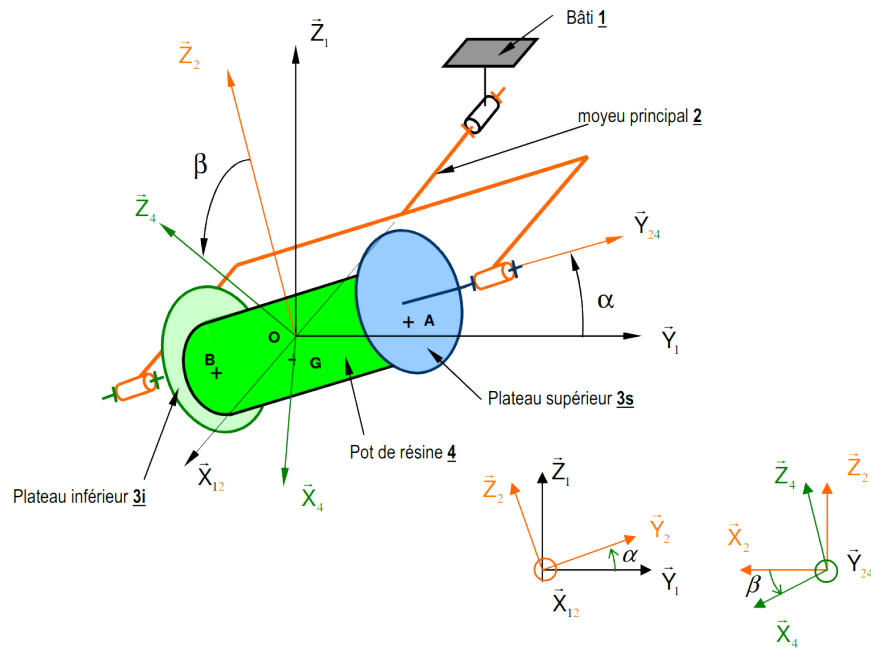
$$[I_{(O,2)}(\mathcal{B}_2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{O, \mathcal{B}_2}$$

- Le pot de résine (4) est en liaison pivot parfaite par rapport au moyeu principal (2) d'axe $(O, \vec{y}_2)$. On définit le paramètre angulaire $\beta = (\vec{z}_2, \vec{z}_4)$. Le repère $\mathcal{R}_4 = (O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ est lié à la pièce (4). Le pot de résine (4) sera considéré comme un cylindre homogène plein de rayon R, de hauteur H et de masse M4. Dans notre étude, le pot de résine sera excentré sur les plateaux et son centre de gravité G sera défini par $\vec{OG} = X_G \vec{x}_4$. La matrice d'inertie du pot de résine (4) en G est défini par :

$$[I_{(G,4)}(\mathcal{B}_4)] = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 \end{bmatrix}_{G, \mathcal{B}_4}$$

Question 1. Déterminer le torseur cinématique $[\mathcal{C}(2/\mathcal{R}_1)]_O$ du moyeu principal (2) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point O.

Question 2. Déterminer le torseur cinématique $[\mathcal{C}(4/\mathcal{R}_1)]_G$ du pot de résine (4) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point G.



Question 3. Déterminer le torseur cinétique $[C_i(2/\mathcal{R}_1)]_O$ du moyeu principal (2) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point O.

Question 4. Déterminer le torseur dynamique $[D(2/\mathcal{R}_1)]_O$ du moyeu principal (2) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point O.

Question 5. Justifier **sans la calculer** la forme de la matrice d'inertie du pot de résine.

Question 6. Déterminer le torseur cinétique $[C_i(4/\mathcal{R}_1)]_G$ du pot de résine (4) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point G.

Question 7. Déterminer le torseur dynamique $[D(4/\mathcal{R}_1)]_O$ du pot de résine (4) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point O.

Question 8. Vérification : Déterminer la matrice d'inertie en O du pot de résine (4). Calculer ensuite le moment cinétique en O pot de résine (4) par rapport au bâti (1). Retrouver le moment cinétique en G du pot de résine (4) par rapport au bâti (1) calculé précédemment.

TD 5-6 - Table vibrante



FIGURE 9 – Table vibrante

La figure 10 représente une modélisation simplifiée d'une table vibrante (figure 9). Ce dispositif permet de tamiser, de répartir, ou encore de compacter des produits (poudres, produits alimentaires ou industriels). On l'utilise par exemple lors du moulage d'éléments préfabriqués en béton pour répartir le mélange et éliminer les bulles d'air qui fragilisent le matériau.

Modélisation

Le repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au sol.

- Un châssis (1) supporté par 4 pieds est solidaire des moules et du carter d'un moteur électrique de vibration. Il possède un mouvement de translation rectiligne par rapport au sol suivant $\vec{x}_0$ repéré par le paramètre λ . La masse de (1) est $M_1 = 1000\text{kg}$. Son centre d'inertie est G_1 . Le repère $\mathcal{R}_1 = (G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au châssis (1).
- L'ensemble tournant (2) est constitué du rotor du moteur électrique (2r) et de deux disques excentrés (2s). (2) est guidé en rotation par rapport à (1) par l'intermédiaire de deux paliers situés en A (liaison rotule) et en B (liaison linéaire annulaire d'axe $B\vec{z}_1$) (figure 2). Le mouvement de rotation d'axe $O\vec{z}_1$ est paramétré par l'angle $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. L'ensemble tourne à vitesse constante ω , ($\theta = \omega t$). Le repère $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est lié à l'ensemble tournant (2). La masse de (2) est $M_2 = 6\text{kg}$. Le couple moteur exercé par le stator lié à (1) sur le rotor (2) est noté C_m .

Notations

L : cote des paliers par rapport au centre d'inertie de l'arbre du rotor O , $L = 152\text{mm}$.

Z : cote sur l'axe $\vec{z}_1$ des centres des disques par rapport au point O, $Z = 200\text{mm}$.

e : excentration des disques de l'ensemble (2), $e = OC = 40\text{mm}$

m_d : masse d'un disque, $m_d = 1.5\text{kg}$.

R : rayon extérieur des disques, $R = 70\text{mm}$

m_r : masse du rotor (sans les disques), $m_r = 3\text{kg}$.

L'épaisseur des disques est supposée négligeable.

La vitesse constante de rotation de (2)/(1) est égale à $\omega = 210\text{rad s}^{-1}$.

Les coordonnées du centre de gravité de l'ensemble tournant (2) sont notées $\overrightarrow{OG_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}$.

La matrice d'inertie de chaque disque (2d) en C est définie par :

$$[I_{(C, \mathcal{B}_2)}(2d)] = \begin{bmatrix} \frac{m_d R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_d R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_d R^2}{2} \end{bmatrix}_{C, \mathcal{R}_2}$$

La matrice d'inertie du rotor (2r) en est définie par : $[I_{(O, \mathcal{B}_2)}(2r)] = \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & A_r & 0 \\ 0 & 0 & C_r \end{bmatrix}_{O, \mathcal{R}_2}$

$$C_r = 2000 \text{ kg mm}^2 \quad A_r = 8000 \text{ kg m}$$

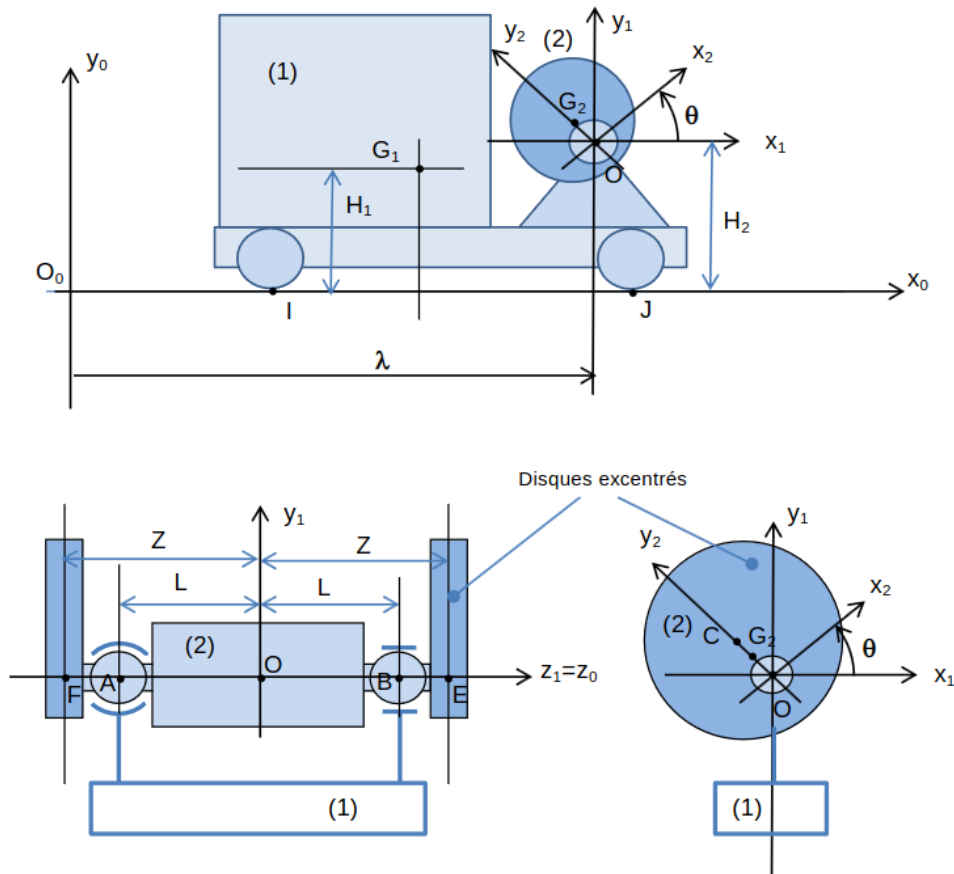


FIGURE 10 – Modélisation de la table vibrante

4 Équations du mouvement du système

Objectif de l'étude : déterminer l'équation de mouvement de (1)/ $\mathcal{R}_0$.

Question 1. Calculer les coordonnées du centre d'inertie de l'ensemble (2) tournant dans la base de votre choix.

Question 2. Montrer que la matrice d'inertie de l'ensemble (2) s'écrit sous la forme :

$$[I_{(G_2, \mathcal{B}_2)}(2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

Question 3. Déterminer le torseur dynamique de l'ensemble (2) en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ au point G_2 . On rappelle que $\omega = \dot{\theta} = \text{cste}$.

Question 4. L'équation de la résultante appliquée à l'ensemble $E=(1)+(2)$ projetée sur l'axe $\vec{x}_0$ nous donne l'équation du mouvement de l'ensemble. Elle s'écrit $\vec{R}_d(E/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{x}_0 = 0$.

En déduire l'expression de λ en fonction du temps. Donner l'amplitude du mouvement. Faire l'application numérique.

5 Choix de l'architecture du système

Objectif : Montrer l'intérêt d'un ensemble tournant symétrique.

On étudie à présent le système non symétrique présenté à la figure 11 et comportant un seul disque de masse $2m_d$ et positionné à une distance $OE = Z$.

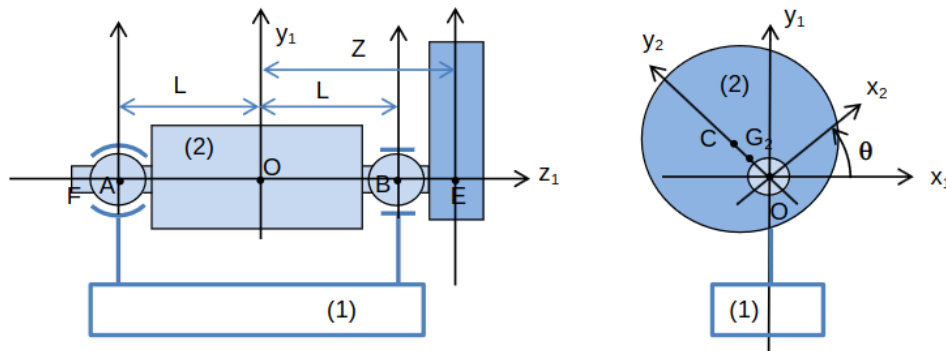


FIGURE 11 – Modélisation non symétrique de l'ensemble tournant

Question 5. Montrer que la matrice d'inertie de l'ensemble (2) se met sous la forme :

$$[I_{(G_2, \mathcal{B}_2)}(2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

Question 6. Déterminer l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_{G_2}(2/0)$ de l'ensemble (2) par rapport à $\mathcal{R}_0$ exprimé au point G_2 .

Question 7. En déduire le torseur dynamique de (2) par rapport à $\mathcal{R}_0$ exprimé au point G_2 . On utilisera les résultats de la question 3 et on négligera les termes en λ dans les expressions de la résultante cinétique et du moment cinétique. On rappelle que $\omega = \dot{\theta} = \text{cste}$.

Question 8. Donner les expressions des torseurs des actions mécaniques de (1) sur (2) aux points A et B. Écrire le torseur équivalent au point O.

Question 9. Le principe fondamental de la dynamique appliqué sur (S) et exprimé au point O permet en négligeant l'action de la pesanteur d'écrire :

$$\begin{aligned} X_A + X_B &= \vec{R}_d(2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{x}_2 \\ Y_A + Y_B &= \vec{R}_d(2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{y}_2 \\ (Y_A - Y_B)L &= \vec{\delta}_O(2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{x}_2 \\ (X_B - X_A)L &= \vec{\delta}_O(2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{y}_2 \end{aligned}$$

Les résultats de la question 7 permettent de mettre en évidence que les termes en λ , $\dot{\lambda}$ et $\ddot{\lambda}$ sont négligeables ce qui conduit aux expressions simplifiées suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{R}_d(2/\mathcal{R}_0) &= -M_2 y_2 \omega^2 \vec{y}_2 \\ \vec{\delta}_O(2/\mathcal{R}_0) &= \left(D_2 + M_2 \frac{eZ}{4} \right) \omega^2 \vec{x}_2 \end{aligned}$$

Avec $y_2 = 20\text{mm}$, $Z = 200\text{mm}$, $L = 152\text{mm}$, $M_2 = 6\text{kg}$ et $D_2 = 0.024\text{kg m}^2$.

En déduire les expressions littérales de X_A , X_B , Y_A et Y_B . Identifier dans ces expressions les termes relatifs à l'excentration du centre d'inertie et ceux relatif au produit d'inertie.

Conclure quant à l'intérêt d'un système symétrique.

TD 7-8 - Freinage et blocage des pneus



L'évolution du freinage hydraulique a conduit les concepteurs à intégrer des fonctions complémentaires pour augmenter l'efficacité du système de freinage :

- un répartiteur de freinage est chargé de moduler la répartition de pression entre les cylindres de frein avant et arrière afin d'éviter le blocage des roues sous l'effet du report de charge engendré par la décélération du véhicule,
- un dispositif d'antiblocage de roue (ABS) est conçu pour éviter l'étape critique de blocage de roue. Il permet ainsi au conducteur de conserver la maîtrise directionnelle de son véhicule quelles que soient sa vitesse, les caractéristiques d'adhérence au sol et l'intensité de freinage. L'ABS est inséré après le maître cylindre de façon à moduler la pression de freinage en fonction de la vitesse de rotation des roues.

Ce TD concerne la modélisation du comportement du véhicule en phase de freinage, la détermination de l'évolution de la décélération en réponse aux actions de freinage.

Ainsi l'objectif pour le concepteur est :

- la détermination des capacités de freinage avec ou sans glissement au contact pneu-route,
- la mise en évidence du rôle du répartiteur de freinage

Modélisation

Les forces aérodynamiques sont négligées. Le véhicule est étudié en freinage moteur débrayé. L'action de pesanteur est telle que $\vec{g} = -g\vec{y}_0$. Le repère $\mathcal{R}_0 = (0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le mouvement est un mouvement plan. Le véhicule est modélisé par 3 solides (Figure 12) :

- Ensemble de 2 roues avant avec leurs disques de frein : solide 1 de masse m , de rayon R et de centre d'inertie C_1 .

Moment d'inertie par rapport à $C_1\vec{z}_0$ (axe principal d'inertie) : $I_{C_1\vec{z}_0} = mR^2$

Liaison pivot sans frottement avec le châssis 3 d'axe $C_1\vec{z}_0$ et de paramètre angulaire θ_1

Contact ponctuel avec frottement (coefficient f_r) avec le sol en I_1 dont le torseur de l'action mécanique

$$\text{est de la forme : } [\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)]_{I_1} = \begin{bmatrix} N_{01}\vec{y}_0 + T_{01}\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{bmatrix}_{I_1}$$

Soumis au cours du freinage à l'action du cylindre de frein solidaire du châssis 3 sur le disque de frein

solidaire du solide 1 dont le torseur réduite en C_1 s'écrit : $\begin{bmatrix} \vec{R}_{f_1} \\ C_{f_1}\vec{z}_0 \end{bmatrix}_{C_1}$

- Ensemble de 2 roues arrière avec leurs disques de frein : solide 2 de masse m , de rayon R et de centre d'inertie C_2 .

Moment d'inertie par rapport à $C_2\vec{z}_0$ (axe principal d'inertie) : $I_{C_2\vec{z}_0} = mR^2$

Liaison pivot sans frottement avec le châssis 3 d'axe $C_2\vec{z}_0$ et de paramètre angulaire θ_2

Contact ponctuel avec frottement (coefficient f_r) avec le sol en I_2 dont le torseur de l'action mécanique est de la forme : $[\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)]_{I_2} = \begin{bmatrix} N_{02}\vec{y}_0 + T_{02}\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{bmatrix}_{I_2}$

Soumis au cours du freinage à l'action du cylindre de frein solidaire du châssis 3 sur le disque de frein solidaire du solide 1 dont le torseur réduite en C_2 s'écrit : $\begin{bmatrix} \vec{R}_{f_2} \\ C_{f_2}\vec{z}_0 \end{bmatrix}_{C_2}$

- Châssis de masse M , de centre de gravité G de coordonnées $(x, 2R, 0)_{\mathcal{R}_0}$ dans le repère $\mathcal{R}_0$. Le véhicule est en décélération : $\dot{x} > 0$ et $\ddot{x} < 0$.

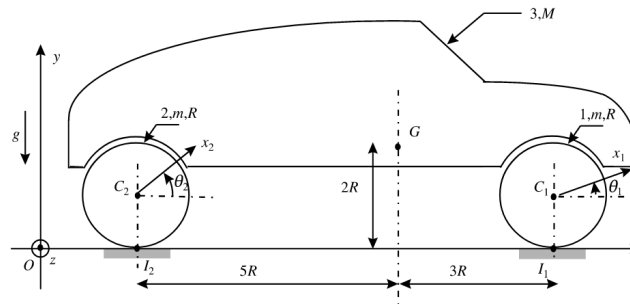


FIGURE 12 – Modélisation du véhicule

Questions

Question 1. Effectuer le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur le système (graphe d'analyse).

Question 2. Identifier les paramètres des mouvements des différents solides et traduire les relations entre ces paramètres (conditions cinématique de roulement sans glissement en I_1 et I_2).

Étude du blocage des roues : glissement simultanément en I_1 et I_2

Question 3. Si les 4 roues sont bloquées (glissement en I_1 et I_2 simultanément) déterminer la décélération limite du véhicule $\ddot{x}_{\text{bloc}}$ en fonction de g et f_r . Justifier l'isolement choisi et les équations utilisées.

Étude du roulement sans glissement

Question 4. Durant la phase de freinage, les effets d'inertie ont une influence sur l'appui du véhicule au sol (correspondant à l'effort normal N_{01} ou N_{02} sur les roues).

1. Déterminer l'expression des efforts normaux aux appuis en fonction de $\ddot{x}$, M , m et g . Justifier l'isolement choisi et les équations utilisées
2. En déduire la décélération $\ddot{x}_{N_2}$ telle que $N_{02} = 0$. Quelle en serait la conséquence ?
3. En déduire l'effort tangentiel maximal à la limite de glissement. Est-il le même pour les deux roues ? Quelle roue risque le plus de glisser ?

Question 5.

1. Exprimer l'effort tangentiel de contact en fonction de la décélération et du couple de freinage appliqué sur la roue. Justifier l'isolement choisi et les équations utilisées.
2. A partir de cette équation et des équations écrites dans la partie blocage des roues, déterminer la décélération $\ddot{x}$ en fonction de M , m , R , C_{f_1} , C_{f_2} .
3. A partir de cette équation et de l'équation de la question 4.c, déterminer l'expression des moments de freinage $C_{f_1}^{\text{lim}}$ et $C_{f_2}^{\text{lim}}$ à la limite du glissement en I_1 et I_2 en fonction des paramètres $\ddot{x}$, f_r , M , m , R , g .

TD 9-10 - Véhicule autonome guidé

Le Centre Hospitalier Universitaire (CHU) de Dijon Bocage Central a retenu pour sa logistique hôtelière hospitalière des VAG (Véhicule Autonome Guidé). Neuf véhicules autonomes à guidage laser (Figure 13a) sont utilisés pour transporter dans les parties non accessibles au public des chariots (Figure 13b) dans lesquels sont placés les déchets, les plateaux repas ou encore le linge. Un chariot est maintenu immobile par rapport au VAG grâce au frottement qui est engendré par les bandes de frottement du VAG. Les VAG effectuent typiquement 930 missions de transport par jour.

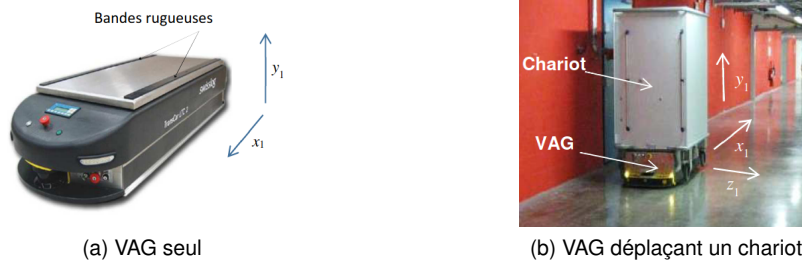


FIGURE 13 – Illustration du VAG

Modélisation

L'accélération de pesanteur vaut $\vec{g} = -g\vec{y}_0$. Le sol est associé au repère $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ qui est supposé galiléen. Le VAG est considéré comme un solide (1) indéformable dont on lui associe le repère $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Le chariot (Figure 14a) est assimilé à un solide rigide (2) auquel on associe le repère $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. Sa masse est notée m_2 et son centre d'inertie G_2 est tel que $\vec{O_2G_2} = \frac{h}{2}\vec{y}_2$. La largeur du chariot est $2a$ (direction $\vec{z}_2$), sa profondeur $2b$ (direction $\vec{x}_2$) et sa hauteur h (direction $\vec{y}_2$). Sa matrice d'inertie est donnée par :

$$[I_{(G_2,2)}(\mathcal{B}_2)] = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

Comme indiqué sur la figure 14b, lorsque le chariot est bien positionné sur le VAG, le contact entre le VAG et le chariot est de type surfacique avec frottement. Le point d'application de la résultante de cette action de contact est noté A tel que $\vec{O_2A} = x_A\vec{x}_1 + z_A\vec{z}_1$. Le point A est situé à l'intérieur du rectangle BCDE. Le torseur de l'action de contact du VAG sur le chariot s'écrit :

$$[\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)]_A = \left\{ \begin{array}{c|c} T_x & 0 \\ N & M \\ T_z & 0 \end{array} \right\}_{A, \mathcal{B}_1}$$

N est la composante normale de l'action de contact. T_x et T_z sont les composantes tangentielles de l'action de contact. M est le moment du frottement, il est exercé autour de l'axe $A\vec{y}_1$. En condition normale, l'action de contact assure que le chariot ne se déplace pas par rapport au VAG.

Partie 1 : Étude du risque de déplacement du chariot par rapport au VAG

Objectif : on cherche ici à déterminer quelles sont les conditions de mouvement du VAG qui risquent de provoquer un déplacement du chariot par rapport au VAG : en basculement, en glissement ou encore en pivotement (Figure 15).

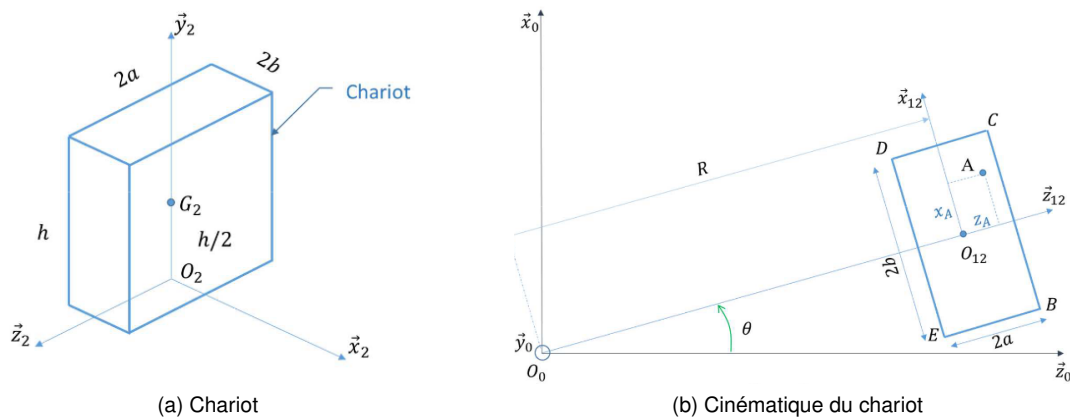


FIGURE 14 – Description du chariot

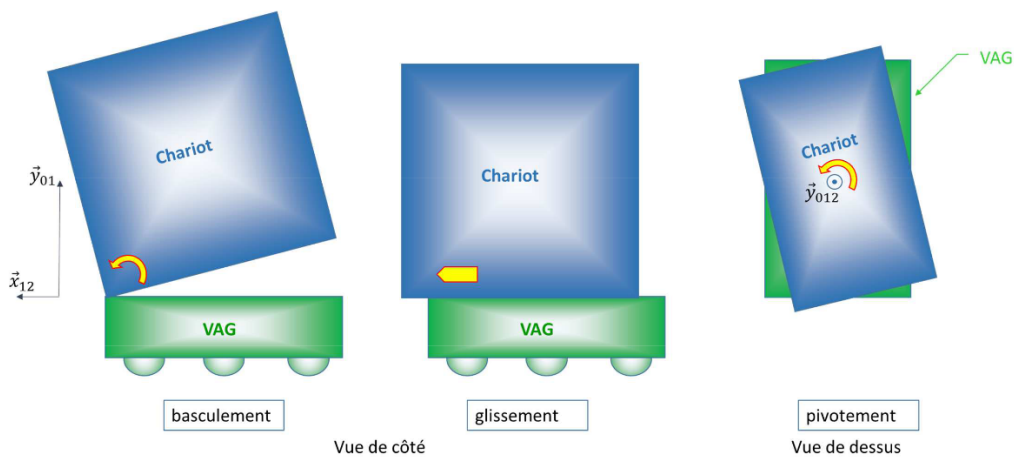


FIGURE 15 – Déplacement du chariot

Pour cette étude on considère :

- que le chariot (2) est maintenu immobile par frottement par rapport au VAG (1). C'est à dire que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.
- que le VAG (1) décrit par rapport au sol (0) un mouvement de rotation de centre O_0 , de rayon R et de paramètre angulaire θ (Figure 14b). La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est supposée **positive**.

Question 1. Déterminer l'ensemble des équations liant le mouvement du chariot et les efforts de contact VAG/chariot.

Question 2. Pour les action de contact entre le VAG et le chariot, on adopte un modèle de frottement de type Coulomb afin de définir la condition de non-glissement :

$$\|T\| \leq \mu \|N\| \text{ et } \|N\| \leq \mu l \|N\|$$

où μ et l sont des paramètres connus qui caractérisent le frottement au contact.

1. Donner la condition sur le mouvement du VAG qui assure le non basculement du chariot selon le segment BC.
2. Donner la condition sur le mouvement du VAG qui assure le non basculement du chariot selon le segment CD.
3. Donner la condition sur le mouvement du VAG qui assure le non basculement du chariot selon le segment BE.

4. Donner la condition sur le mouvement du VAG qui assure que le chariot ne risque pas de glisser par rapport au VAG dans la seule direction $O\vec{z}_1$ (glissement purement radial).
5. Donner la condition sur le mouvement du VAG qui assure que le chariot ne risque pas de glisser par rapport au VAG dans la seule direction $O\vec{x}_1$ (glissement purement tangentiel).
6. Donner la condition sur le mouvement du VAG qui assure le non pivotement vertical du chariot selon l'axe $A\vec{y}_1$.

Partie 2 : Spécification du moteur du VAG

Objectif : L'objectif de cette partie est de spécifier les moteurs à choisir pour le VAG afin de satisfaire les exigences de vitesse et d'accélération.

Le VAG (1) comporte 4 roues (W3), (W4), (W5) et (W6) auxquelles on associe les repères suivants : $\mathcal{R}_3 = (P_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, $\mathcal{R}_4 = (P_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$, $\mathcal{R}_5 = (P_5, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ et $\mathcal{R}_6 = (P_6, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$ (Figure 17).

Chaque roue, de rayon r , est montée en liaison pivot d'axe $P_n\vec{z}_1$ par rapport au châssis (1') du VAG et de paramètre θ_n . Chaque liaison pivot est imparfaite et engendre un couple de frottement du châssis (1') du VAG sur la roue noté $\vec{C}_{P_n}(1'/n) = -\epsilon C_f \vec{z}_1$ qui dépend seulement du sens de rotation de la roue par rapport au châssis ($\epsilon = 1$ si la vitesse angulaire de la roue par rapport au châssis est positive, $\epsilon = -1$ sinon).

Les roues (W4) et (W6) sont motorisées grâce à un des moteurs électriques (M4) et (M6) et des réducteur de vitesse (R4) et (R6) (Figure 16).

Le rotor du moteur (M4) est animé d'une vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{M4/1'} = \omega_{M4} \vec{z}_1$. Le stator du moteur (M4) est considéré comme solidaire du VAG. Il développe sur le rotor un couple électromagnétique $\vec{C}_{1'/M4} = C_{M4} \vec{z}_1$.

Le rotor du moteur (M6) est animé d'une vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{M6/1'} = -\omega_{M6} \vec{z}_1$. Le stator du moteur (M6) est considéré comme solidaire du VAG. Il développe sur le rotor un couple électromagnétique $\vec{C}_{1'/M6} = C_{M6} \vec{z}_1$.

Le rapport de réduction de chacun des réducteurs de vitesse est noté u tel que $u = -\frac{\omega_{M4}}{\dot{\theta}_4} = -\frac{\omega_{M6}}{\dot{\theta}_6}$.

Pour cette partie on considère :

- que l'ensemble VAG/chariot effectue un mouvement rectiligne de direction $\vec{x}_0$ par rapport au sol et de vitesse $\dot{x}$,
- que les 4 roues du VAG roulent sans glisser par rapport au sol,
- que le sol est horizontal,
- que les 2 moteurs développent le même couple $C_m = C_{M4} = C_{M6}$,
- que l'énergie cinétique des parties tournantes appartenant aux réducteurs est négligeable devant les autres énergies cinétiques,
- que les réducteurs sont parfaits (pas de glissement, pas de frottement)

On note S le système matériel constitué de l'ensemble VAG (avec ses roues et système de motorisation) et du chariot. On définit les paramètres suivants :

- Moment d'inertie d'un moteur selon son axe de rotation $J_m = 0.0002 \text{ kg.m}^2$ (axe principal d'inertie),
- Moment d'inertie d'une roue selon son axe de rotation $J_r = 0.05 \text{ kg.m}^2$ (axe principal d'inertie),
- Rapport de réduction du réducteur $u = 24$,
- Masse du système $S = \{1', W3, W4, W5, W6, M4, M6, R4, R6, 2\} : m_S = 730 \text{ kg}$,
- Rayon des roues : $r = 105 \text{ mm}$,
- Couple de frottement : $C_f = 0.8 \text{ N.m}$

Question 3. Donner l'expression de l'énergie cinétique du système S par rapport au repère $\mathcal{R}_0$. En déduire la contribution numérique de chacun des termes. Était-il possible de négliger l'inertie du rotor du moteur ?

Question 4. Donner l'expression de la puissance des efforts **extérieurs** appliqués au système S dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$.

Question 5. Donner l'expression de la puissance des efforts **intérieurs** appliqués au système S dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$.

Question 6. Déduire des questions précédentes l'expression du couple moteur C_m en fonction de la variable d'espace x et du temps t .

Question 7. Le choix du moteur doit satisfaire 2 exigences :

1. La vitesse nominale spécifiée pour le VAG est $\dot{x}_n = 1.2 \text{ m.s}^{-1}$,

2. Pour passer de la vitesse nulle à la vitesse nominale (ou l'inverse), le chariot doit parcourir au maximum une distance $d = 0.2 \text{ m}$.

Donner l'expression, puis la valeur numérique du couple moteur requis pour satisfaire ces exigences. Pour l'exigence 2, on considérera que le mouvement est uniformément accéléré (ou décéléré)

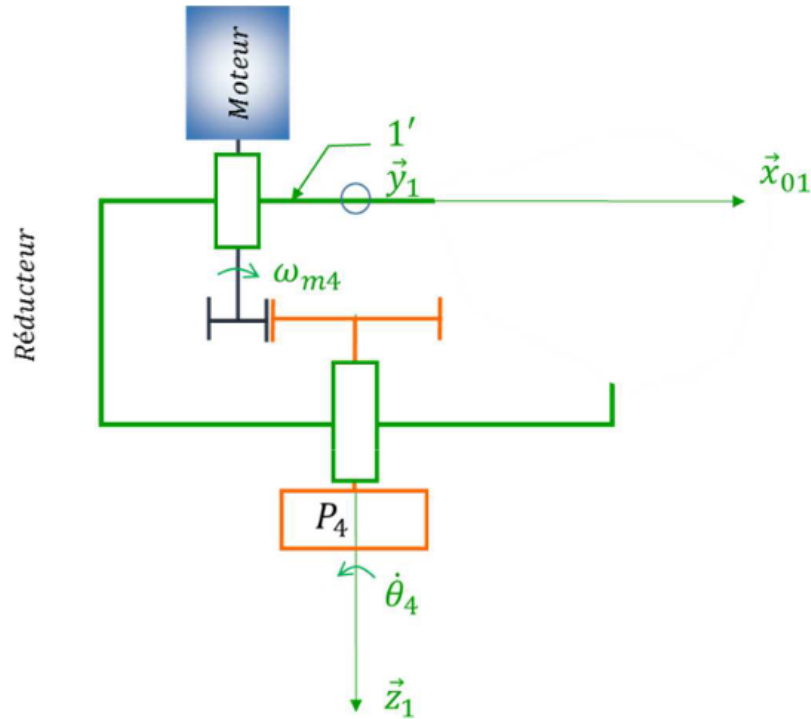


FIGURE 16 – Motorisation de la roue (W4)

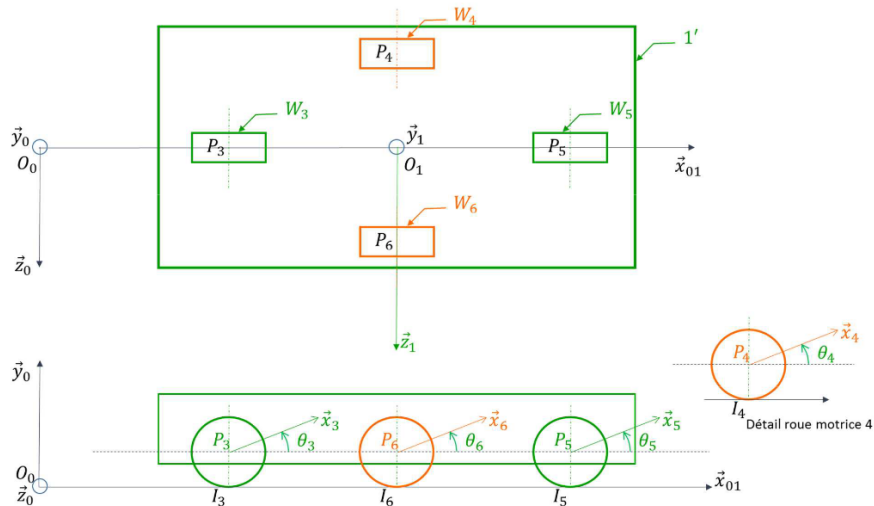


FIGURE 17 – Description des roues du VAG

TD 11-12 - Robot Lola

Le robot humanoïde LOLA (Figure 18a), développé par l'Université de Munich, est un robot de forme humaine conçu pour un mode de marche rapide.

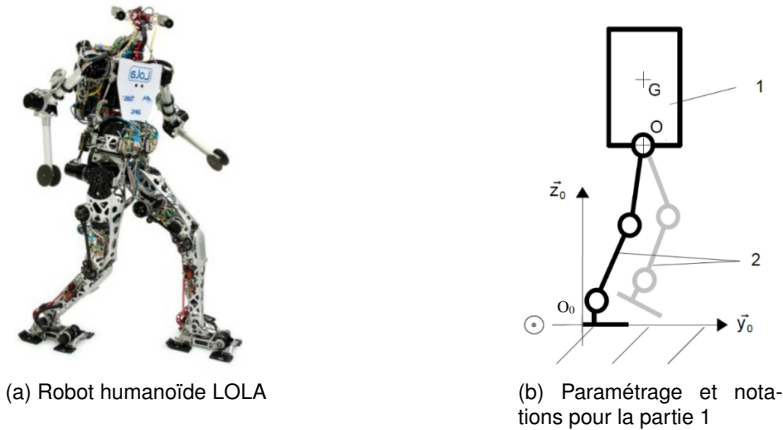


FIGURE 18 – Illustration et schéma du robot LOLA

L'étude comporte 2 parties :

- La première partie a pour objectif de vérifier que la conception mécanique permet de satisfaire l'exigence d'accélération en assurant la stabilité robot durant le mouvement.
- La seconde partie est destinée à fournir un modèle de la dynamique du tronc du robot pour le dimensionnement et la synthèse de la commande du moteur du tronc.

Partie 1 : Vérification du non basculement durant la phase d'accélération

Pour cette partie on utilise la représentation géométrique de la Figure 18b. On considère que :

- le repère $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est galiléen,
- l'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ avec $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$
- le robot comporte un torse assimilable à un solide rigide (1), de centre d'inertie G tel que $\overrightarrow{O_0 G} = Y_G \vec{y}_0 + L \vec{z}_0$, de masse m_1 ,
- le robot comporte 2 jambes (2) dont l'effet d'inertie et de masse peut être négligé devant les autres effets pris en compte dans l'étude,
- le robot est en marche vers l'avant (suivant $\vec{y}_0$) sur une surface horizontale. Le torse (1) est alors en mouvement de translation rectiligne **horizontale** suivant l'axe $\vec{y}_0$,
- le robot est en appui sur un seul pied sur le sol, via l'une des 2 jambes,
- le pied d'appui est sans mouvement par rapport au sol,
- la longueur de la semelle du pied est notée l . Sur la Figure 18b, la semelle s'étend donc de 0 à l sur l'axe $O_0 \vec{y}_0$.
- l'action mécanique du sol (0) sur la semelle du pied, modélisée comme un appui plan avec frottement,

s'applique au point H_S , tel que $\overrightarrow{O_0 H_S} = Y_H \vec{y}_0$ et elle définie par le torseur $[F_{0 \rightarrow 2}]_{H_S} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ T & 0 \\ N & 0 \end{array} \right\}_{H_S}$

Question 1. Déterminer la relation entre les données géométriques du problème, l'accélération du torse, les paramètres cinématiques et Y_G en écrivant le PFD sur un système bien choisi.

Question 2. L'étude de la marche des robot humanoïde montre que le point H_S doit se situer à l'intérieur du segment formé par la semelle du pied en contact avec le sol. Donner l'expression de la valeur maximale permise pour Y_G (celle pour laquelle le robot doit commencer à prendre également appui sur l'autre jambe), et sa valeur numérique pour $l = 0.3\text{m}$, $L = 1.1\text{m}$ et $\ddot{Y}_G = 1.4\text{m s}^{-2}$.

Question 3. Donner l'expression de l'accélération $\ddot{Y}_G$ permise en fonction du coefficient de frottement entre la semelle et le sol. Quelle est la valeur minimale de ce coefficient pour que l'accélération puisse atteindre la valeur de $\ddot{Y}_G = 1.4\text{m.s}^{-2}$ qui est requise par le cahier des charges.

Partie 2 : Modélisation dynamique du tronc pour le contrôle de la posture

L'objectif de cette partie est de mettre en place un modèle du maintien vertical du tronc de LOLA. Ce modèle sera utilisé pour le dimensionnement et la commande du moteur d'inclinaison du torse par rapport au bassin du robot qui supporte les 2 jambes. Pour information, une centrale inertielle équipée d'un accéléromètre, d'un gyroscope et d'une unité de traitement permet d'obtenir en temps réel la valeur de l'angle d'inclinaison du torse par rapport à la vertical (ainsi que ses 2 premières dérivées par rapport au temps)

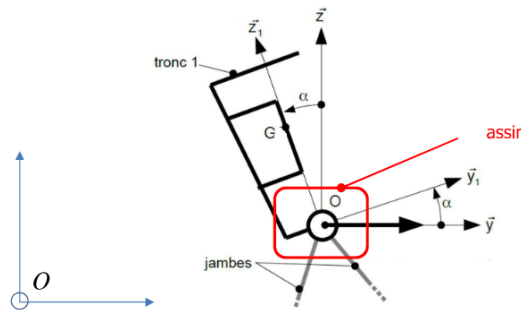


FIGURE 19 – Modélisation géométrique du robot

Pour cette partie 2, on considère que :

- le robot comporte un tronc assimilable à un solide rigide (1), auquel est associé le repère $\mathcal{R}_1 (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, une paire de jambes (2) qui ne sont pas considérées dans cette partie et un bassin (3) auquel est associé le repère $\mathcal{R}_3 (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ avec $O_3 = O$,
- le torse (1) a une masse m_1 , son centre de gravité G est tel que $\vec{OG} = L\vec{z}_1$ et sa matrice d'inertie en O exprimée dans la base $\mathcal{B}_1$ est notée :

$$[I_{(O, \mathcal{B}_1)}(1)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{0, \mathcal{B}_1}$$

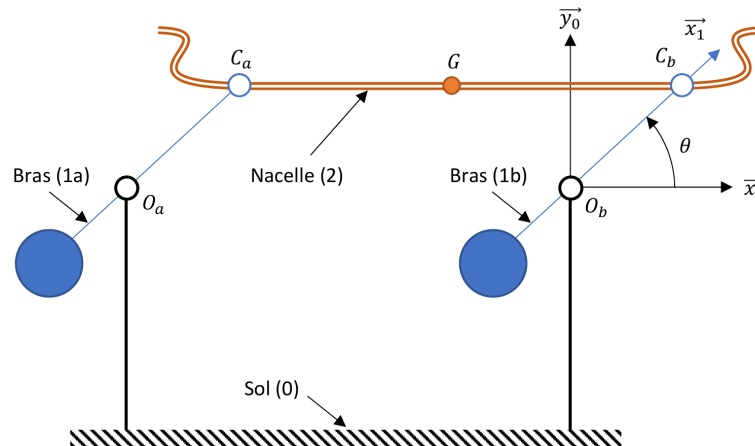
- le bassin (3) est en translation **rectiligne horizontale** par rapport au repère terrestre $\mathcal{R}_0$ de sorte que $\vec{O_0O_3} = Y_B\vec{y}_{03}$. Les valeurs Y_B , $\dot{Y}_B$ et $\ddot{Y}_B$ sont des quantités connues à chaque instant car elles sont engendrées par le système de planification de mouvement du robot.
- Le tronc (1) du robot est lié au bassin (3) du robot par une liaison pivot parfaite d'axe $O\vec{x}_{01}$ et de paramètre α . Cette liaison est motorisée par un ensemble motoréducteur qui exerce un couple de redressement du tronc modélisé par le torseur

$$[T_{3 \rightarrow 1}]_O = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & C_R \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$$

Question 4. En appliquant le PFD à un système bien choisi, déterminer l'expression du couple de redressement C_R en fonction du temps, des paramètres cinématiques et des propriétés géométriques ou massiques définies précédemment. Déterminer également les actions développées par la liaison pivot liant le bassin (3) et le tronc (1)

TD 13 - Manège tapis volant

L'objet de cette étude est le manège *Tapis volant* rencontré dans certaines fêtes foraines. La nacelle dans laquelle prend place le public se déplace grâce à la présence de 4 bras parallèles de même longueur. Un moteur permet d'amener le manège en position verticale puis l'action du moteur est aidée par la gravité afin de produire des rotations rapides de haut en bas.



Le mécanisme peut être modélisé par 5 solides :

- Le sol (0) correspond au bâti (référentiel Galiléen)
- Le bras (1a) fait le lien entre 0 et 2
 - sa masse est non nulle
 - il comporte un contrepoids de sorte que son centre de gravité soit en O_a
 - il possède deux plans de symétrie : $(O_a, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ et $(O_a, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$
- Le bras (1b) fait le lien entre 0 et 2
 - sa masse est non nulle
 - il comporte un contrepoids de sorte que son centre de gravité soit en O_b
 - il possède deux plans de symétrie : $(O_b, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ et $(O_b, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$
- La nacelle (2) transporte les passagers, elle est de masse m et de centre de gravité G
- Un arbre moteur (3) décrit ci-après

Les liaisons entre les solides sont :

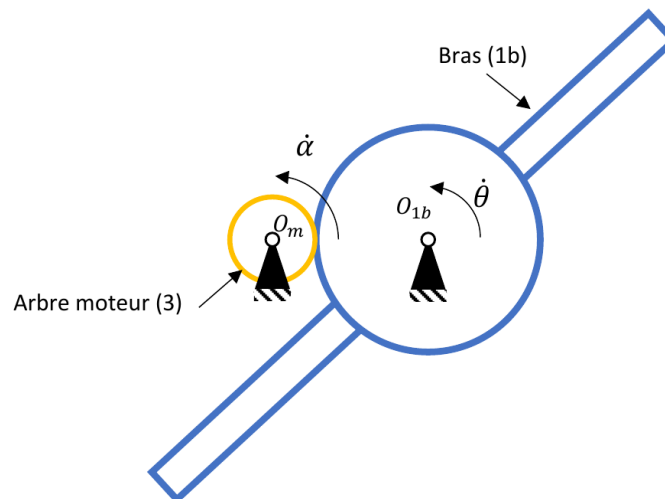
- Un pivot parfait d'axe $O_a\vec{z}_0 = O_a\vec{z}_1$ entre (0) et (1a) de paramètre θ
- Un pivot parfait d'axe $O_b\vec{z}_0 = O_b\vec{z}_1$ entre (0) et (1b) de paramètre θ
- Un pivot d'axe $C_a\vec{z}_0 = C_a\vec{z}_1$ entre (1a) et (2) avec un couple de frottement C_f de (1a) sur (2)
- Un pivot d'axe $C_b\vec{z}_0 = C_b\vec{z}_1$ entre (1b) et (2) avec un couple de frottement C_f de (1b) sur (2)
- Un pivot d'axe $O_m\vec{z}_0$ entre (0) et (3) de paramètre α
- Un engrenage parfait entre (3) et (1b)

On considère que le problème est plan.

La gravité est telle que $\vec{g} = -g\vec{y}_0$.

Le mécanisme est actionné par l'arbre moteur (3) :

- de masse non nulle et de centre de gravité O_m
- d'inertie I_m autour de son axe de rotation $O_m\vec{z}_0$ (axe principal d'inertie)
- soumis à un couple C_m par l'intermédiaire du stator solidaire du bâti (0)
- le rapport de réduction r de l'engrenage est connu : $r = -\frac{\dot{\theta}}{\dot{\alpha}}$



On donne :

$$\begin{aligned} - \overrightarrow{O_a C_a} &= \overrightarrow{O_b C_b} = l \vec{x}_1 \\ - O_a O_b &= C_a C_b = L \end{aligned}$$

On étudie la phase de montée au démarrage du manège. On connaît θ , $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ souhaités et on cherche le couple C_m à fournir pour obtenir le mouvement désiré.

Question 1. Justifier la forme des matrices d'inertie de (1a) et (1b) aux points O_a et O_b dans la base $\mathcal{B}_1$. On suppose que (1a) et (1b) ont la même répartition de masse donc les notations seront les mêmes.

Question 2. Justifier la nature du mouvement de (2) par rapport à (0). Que peut-on en déduire quant à la vitesse de G ?

Question 3. Effectuer le graphe d'analyse du système.

Question 4. Écrire l'énergie cinétique E_c de l'ensemble $S = \{(1a), (1b), (2), (3)\}$ par rapport au référentiel galiléen en faisant apparaître comme seuls paramètres cinématiques θ et ses dérivées.

Question 5. Détailler la puissance P_{ext} développée par l'ensemble des forces extérieures au système S en faisant apparaître comme seuls paramètres θ et ses dérivées.

Question 6. Justifier le signe de C_m en fonction des résultats obtenus à la question précédente.

Question 7. Déterminer la puissance P_{int} développée par l'ensemble des efforts intérieurs au système S en faisant apparaître comme seuls paramètres cinématiques θ et ses dérivées.

Question 8. Justifier le signe de C_f en fonction des résultats obtenus à la question précédente.

Question 9. Écrire le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système S et en déduire l'expression du couple C_m .