Correction DS ASNL

2023-2024 20 dec 2023

Exercice 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2(1+x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_1(1+x_1) \end{cases}$$

① point d'equilibre

$\dot{x}_2 = 0 \longrightarrow x_1 = 0$ ou -1 $\longrightarrow$ pas d'eq pour la 1ère eq

$\dot{x}_1 = 0 \longrightarrow x_2 = 0$

② $\dot{x} \simeq A x$ $\quad A = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

$$A = \begin{pmatrix} -1+x_2 & 1+x_1 \\ -2x_1-1 & 0 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

vp : $\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \longrightarrow vp = -0{,}5 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ type d'equilibre : foyer stable

(3) 1re méthode de Lyapunov

les vp du linéarisé étant $Re < 0$

$\Rightarrow$ l'origine pour le système non linéaire est AS

(4) $V(x) = \frac{a}{2} x_1^2 + \frac{b}{2} x_2^2$

$$\dot V(x) = a \dot x_1 x_1 + b \dot x_2 x_2$$

$$= -a x_1^2 + a x_1 x_2 (1 + x_1)$$

$$- b x_2 x_1 (1 + x_1)$$

pour $a = b = 1$

$$\dot V(x) = -x_1^2 \leq 0$$

origine stable (mais pas asymptotiquement)

$\dot V(x) = 0$ pour $x_1 = 0$ et $\forall x_2$

Appliquons le principe de LaSalle

$$\mathcal{N} = \{ x \mid x_1 = 0 \}$$

Dans $\mathcal{N}$: $\begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = 0 \end{cases}$ si $x_2 \neq 0$ $x \notin \mathcal{N}$

ensemble invariant : $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ origine AS

⑤ Ce résultat de stabilité est global, il n'y a pas de contrainte sur l'état et la fonction V est radialement non bornée

Exercice 2

① pour $A \leq a \longrightarrow -\frac{1}{N(A)} = -\infty$

pour $A > a \longrightarrow -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4\sqrt{\frac{A^2-a^2}{A^2}}} = -\frac{\pi A^2}{4\sqrt{A^2-a^2}}$

$$\left(-\frac{1}{N(A)}\right)' = -\frac{\pi}{4}\,\frac{2A\left(\sqrt{A^2-a^2}\right) - A^2\frac{2A}{2\sqrt{A^2-a^2}}}{\left(\sqrt{A^2-a^2}\right)^2}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\,\frac{2A(A^2-a^2) - A^3}{\left(\sqrt{A^2-a^2}\right)^3} = -\frac{\pi}{4}\,\frac{A^3 - 2a^2A}{\left(\sqrt{A^2-a^2}\right)^3}$$

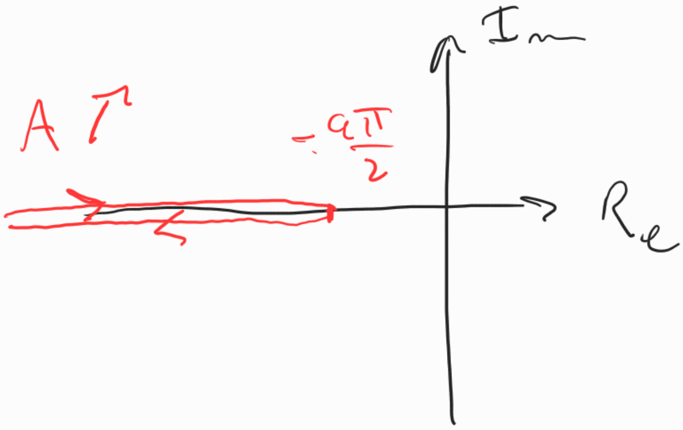
$$= -\frac{\pi}{4}\,\frac{A}{\left(\sqrt{A^2-a^2}\right)^3}\left(A^2-2a^2\right)$$

$\left(-\frac{1}{N(A)}\right)' = 0$ pour $A = a\sqrt{2}$

(et pour $A=0$ mais $A>a$)

A	a		$a\sqrt{2}$		$+\infty$
$\left(-\frac{1}{N(A)}\right)'$		$+$		$-$	
$-\frac{1}{N(A)}$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{a\pi}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

(2)



(3) Il n'y aura pas d'intersection des courbes si

$$-\frac{a\pi}{2} < -\frac{2}{3}$$

$$\iff a > \frac{4}{3\pi}$$

Exercice 3

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

(1) pour $u = 0$

$\dot{x}_2 = 0$

linéarisation de $\dot{x}_1$

$$\dot{x}_1 = \cos(x_1)\Big|_{x_1=0} x_1 + x_2$$

autour de l'origine

$$\dot{x} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

origine du système instable

(2) changement de variable

$$z_1 = x_1$$
$$z_2 = \sin x_1 + x_2$$

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = \dot{x}_1 \cos x_1 + \dot{x}_2$$
$$= \cos x_1 \left(\sin x_1 + x_2 \right) + u$$

pour $u = -\cos x_1 \left(\sin x_1 + x_2 \right) + v$

on a $\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$

(3) pol. carac. (desiré) $(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$

pour $v = -[k_1 \;\; k_2] z$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} z$$

il faut $k_1 = 6$ et $k_2 = 5$