

Correction du TDA

Exercice 2

Soit v une f^n C^2 sur $\bar{\Omega}$ telle que : $v = g$ sur $\partial\Omega$

On pose $\tilde{u} = u - v$. On a :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = -\Delta u + \Delta v = \Delta v \text{ sur } \Omega \\ \tilde{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

on peut donc utiliser le résultat du cours pour $\tilde{u}$.

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_k} \int_{\Omega} \Delta v(x') \varphi_k(x') dx' \right] \varphi_k(x)$$

$$\text{or } \int_{\Omega} \Delta v(x') \varphi_k(x') dx' = \int_{\Omega} v(x') \Delta \varphi_k(x') dx' - \int_{\partial\Omega} v(x') \frac{\partial \varphi_k(x')}{\partial n} dS$$

(voir corrigé exercice 1)

$$\text{soit encore : } \int_{\Omega} \Delta v(x') \varphi_k(x') dx' = -\frac{1}{\lambda_k} \int_{\Omega} v(x') \varphi_k(x') dx' - \int_{\partial\Omega} g(x') \frac{\partial \varphi_k(x')}{\partial n} dS$$

$$\text{d'ai } \tilde{u}(x) = - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} v(x') \varphi_k(x') dx}_{v(x)} \varphi_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} \int_{\partial\Omega} g(x') \frac{\partial \varphi_k(x')}{\partial n} dS \right) \varphi_k(x)$$

d'où

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k(x)$$

avec

$$u_k = - \frac{1}{\lambda_k} \int_{\partial \Omega} g(x) \frac{\partial \varphi_k(x')}{\partial n} dS$$

Exercice 3

$$(1) \begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \\ u'(0) = u'(L) = 0 \end{cases}$$

Pour simplifier les calculs, on admet sans démonstration que les valeurs propres λ sont toutes réelles et ≥ 0 . On pose donc $\lambda = \omega^2$ avec $\omega \geq 0$.

on a

$$(2) \begin{cases} u'' + \omega^2 u = 0 & (i) \\ u'(0) = u'(L) = 0 & (ii) \end{cases}$$

$$(i) \Rightarrow u(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

avec A et $B \in \mathbb{R}$.

$$u'(x) = -A\omega \sin(\omega x) + B\omega \cos(\omega x) \Big|_{x=0} B=0$$

$$(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} B\omega = 0 \\ \omega A \sin(\omega L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=0 \\ A \sin(\omega L) = 0 \end{cases}$$

$$A \neq 0 \Leftrightarrow \omega L = k\pi$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$
car $\omega > 0$ par hypothèse.

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{k\pi}{L}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \omega^2 = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$$

on veut une solution non nulle

(2)

D'où finalement les valeurs propres :

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$$

et les fonctions propres associées :

$$\varphi_k(x) = A \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = A \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$\int_0^L \varphi_k^2 dx = 1 \quad (\Rightarrow) \quad A^2 \frac{L}{2} = 1$$

$$(\Rightarrow) \quad A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}$$

Exercice 4 En cherchant les solutions de la forme $\alpha(x) \beta(y)$ on tombe sur le problème :

$$-\alpha''(x) \beta(y) - \beta''(y) \alpha(x) = \lambda \alpha(x) \beta(y)$$

d'où en divisant par $\alpha\beta$, on trouve :

$$(1) \quad -\frac{\alpha''(x)}{\alpha} - \frac{\beta''(y)}{\beta} = \lambda \quad \forall (x,y) \in [0,L] \times [0,H]$$

(1) il est possible que si $\frac{\alpha''}{\alpha}$ et $\frac{\beta''}{\beta}$ sont des constantes.

On doit trouver deux constantes λ_α et λ_β telles que :

$$(2) -\frac{\alpha''}{\alpha} = \lambda_\alpha \quad (3) -\frac{\beta''}{\beta} = \lambda_\beta$$

$$\text{càd } (4) -\alpha'' = \lambda_\alpha \alpha \quad (5) -\beta'' = \lambda_\beta \beta$$

$$\text{avec } (6) \alpha(0) = \alpha(L) = 0$$

d'après les conditions aux limites pour x

$$(7) \beta(0) = \beta(H) = 0$$

On a déjà résolu ce problème en cours.

Ce sont les fonctions propres et valeurs propres du Laplacien en 1D avec conditions de

Dirichlet.

$$\text{on a : } \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_\alpha^k = \frac{\pi^2 k^2}{L^2} & \lambda_\beta^{k'} = \frac{\pi^2 k'^2}{H^2} \\ k \in \mathbb{N}^* & k' \in \mathbb{N}^* \\ \alpha^k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) & \beta^{k'}(y) = \sqrt{\frac{2}{H}} \sin\left(\frac{\pi k' y}{H}\right) \end{array} \right.$$

Finalement les valeurs propres λ peuvent être indexées par deux entiers k et $k' \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{kk'} = \frac{\pi^2 k^2}{L^2} + \frac{\pi^2 k'^2}{H^2} \\ \varphi_{kk'} = \frac{2}{\sqrt{HL}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k'\pi y}{H}\right) \end{array} \right.$$