Exercices sur le chapitre 1

Dans tous les exercices qui suivent, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^q$ de frontière régulière $\partial\Omega$, f une fonction régulière de Ω dans $\mathbb{R}$ et g une fonction régulière de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soit $q > 1$ et soient u et v deux fonctions appartenant à $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$.
1) A partir de la formule d'Ostrograski, démontrer que pour tout $i \in \{1 \dots q\}$, on a la formule dite d'intégration par partie dans $\mathbb{R}^q$:

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathrm{x} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\mathrm{x} + \int_{\partial\Omega} uvn_i dS \tag{1}$$

où n_i est la ième composante de la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$. 2) En vous servant de (1), montrer que pour tout couple (u, v) de fonctions de $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{C})$, nulles sur $\partial\Omega$, on a :

$$\int_\Omega \Delta u \bar{v} d\mathrm{x} = \int_\Omega u \bar{\Delta} v d\mathrm{x} \tag{2}$$

3) Comment peut on réécrire cette propriété à l'aide du produit scalaire sur $L^2(\Omega, \mathbb{C})$? En déduire que les valeurs propres de l'opérateur Δ avec conditions de Dirichlet sont toutes réelles.

Exercice 2. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & sur \quad \Omega \\ u = g & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

En vous servant des résultats du cours, montrer que la solution de (3) a pour expression :

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k \tag{4}$$

où les coefficients u_k ont pour expression :

$$u_k = -\frac{1}{\lambda_k} \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial \phi_k}{\partial n} dS \tag{5}$$

et où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction ϕ_k est fonction propre de l'opérateur $-\Delta$, avec condition de Dirichlet homogène, associée à la valeur propre λ_k et vérifie donc par définition :

$$\begin{cases} - \quad \Delta \phi_k = \lambda_k \phi_k & sur \quad \Omega \\ \qquad \phi_k = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

On se contentera d'une démonstration formelle au sens où on ne se préoccupera pas de prouver que les fonctions impliquées sont assez régulières pour pouvoir utiliser la formule d'intégration par partie et on ne cherhera pas à justifier la convergence de la série de fonctions définissant la solution.

Exercice 3. Calculez les valeurs propores et les fonctions propres assoicées à l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2}$ sur $[0, L]$, associées aux conditions aux limites : $\frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(L) = 0$.

Exercice 4. Calculez les valeurs propores et les fonctions propres assoicées à l'opérateur $-\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ sur $[0, L] \times [0, H]$, associées aux conditions aux limites :

$$\forall x \in [0, L], u(x, 0) = u(x, H) = 0 \qquad \forall y \in [0, H], u(0, y) = u(L, y) = 0$$

On cherchera les fonctions propres sous la forme : $\phi(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$ et on montrera qu'on peut se ramener à un problème monodimensionnel déjà résolu en cours.

Exercice 5. On s'intéresse au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f & sur \quad \Omega \\ u = g & sur \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{7}$$

où les a_{ij} sont des fonctions C^1 sur $\bar{\Omega}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathrm{x} \in \Omega, \quad \forall (i, j) \in \{1 \ldots q\} \times \{1 \ldots q\}, a_{ij}(\mathrm{x}) = a_{ji}(\mathrm{x}) \\ \forall \mathrm{x} \in \Omega, \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_q) \in \mathbb{R}^q, \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}(\mathrm{x})\xi_i\xi_j > \alpha|\xi|^2 \end{array} \right. \tag{8}$$

avec α une constante réelle strictement positive et $|\xi| = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_q^2)^{1/2}$.

Question 1) En vous inspirant de la démonstration d'unicité pour l'équation de Poisson, montrer que le problème (7) possède au plus une solution dans $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$.

Question 2) Montrer que l'opérateur $u \to -\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$ est auto-adjoint défini positif sur $L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

Question 3) Comment peut s'écrire l'opérateur $u \to -\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$ à l'aide des opérateur div, $\vec{\nabla}$ et de la matrice A de coefficient a_{ij} ?