

Exercices sur le chapitre 2

Exercice 1. Démontrer qu'il existe au plus une solution $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega}, \mathbb{R})$ du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k\Delta u(t, x) = f(t, x) & \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(t, x) = g(t, x) & \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière régulière $\partial\Omega$, f une fonction régulière de $\mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, g une fonction régulière de $\mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$ dans $\mathbb{R}$, u_0 une fonction régulière de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ et k un réel strictement positif.

Corrigé. Supposons qu'il existe deux solutions u et v du problème (7). Posons : $w = u - v$. w est solution du problème homogène :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ w(0, \cdot) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (2)$$

Montrons que cela implique que w est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega}$. En multipliant l'EDP par w et en intégrant sur Ω on obtient :

$$\int_{\Omega} w(t, x) \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) dx - k \int_{\Omega} w(t, x) \Delta w(t, x) dx = 0 \quad (3)$$

Or on a :

$$w(t, x) \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial t}(t, x)$$

et w étant nulle sur $\partial\Omega$, on sait que (par intégration par partie) :

$$\int_{\Omega} w(t, x) \Delta w(t, x) dx = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} w(t, x) \cdot \vec{\nabla} w(t, x) dx$$

On tire donc de (3) que :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial w^2}{\partial t}(t, x) dx + k \int_{\Omega} \vec{\nabla} w(t, x) \cdot \vec{\nabla} w(t, x) dx = 0 \quad (4)$$

En se servant du théorème de dérivation sous le signe somme pour les fonctions régulières, on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t, x)^2 dx = -k \int_{\Omega} \vec{\nabla} w(t, x) \cdot \vec{\nabla} w(t, x) dx \quad (5)$$

D'où l'inégalité :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t, \mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \leq 0$$

La fonction $t \rightarrow \int_{\Omega} w(t, \mathbf{x})^2 d\mathbf{x}$ est donc décroissante ce qui implique que pour tout t positif :

$$\int_{\Omega} w(t, \mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} w(0, \mathbf{x})^2 d\mathbf{x} = 0 \quad (6)$$

On en déduit que pour tout $t > 0$, $w(t, \cdot)$ est identiquement nulle sur Ω d'où la nullité de la fonction w sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$. Cqfd.

Exercice 2. Démontrer qu'il existe au plus une solution $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega}, \mathbb{R})$ du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \vec{v}(\mathbf{x}) \cdot \vec{\nabla} u(t, \mathbf{x}) - k \Delta u(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) & \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(t, \mathbf{x}) = g(t, \mathbf{x}) & \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (7)$$

avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière régulière $\partial\Omega$, f une fonction régulière de $\mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, g une fonction régulière de $\mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$ dans $\mathbb{R}$, u_0 une fonction régulière de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, k un réel strictement positif et $\mathbf{x} \rightarrow \vec{v}(\mathbf{x})$ un champ de vecteurs C^1 sur $\overline{\Omega}$ tel que :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \operatorname{div}(\vec{v})(\mathbf{x}) = 0$$

Indication. On utilisera la même méthode que pour l'exercice 1 et on montrera que :

$$w\vec{v} \cdot \vec{\nabla} w = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (w^2)$$

et

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} (w^2) = \operatorname{div}(w^2 \vec{v}).$$