

Modélisation d'un réchauffeur

On s'intéresse dans ce projet à la modélisation d'un réchauffeur thermique tel que schématisé sur la figure 1 ci-dessous.

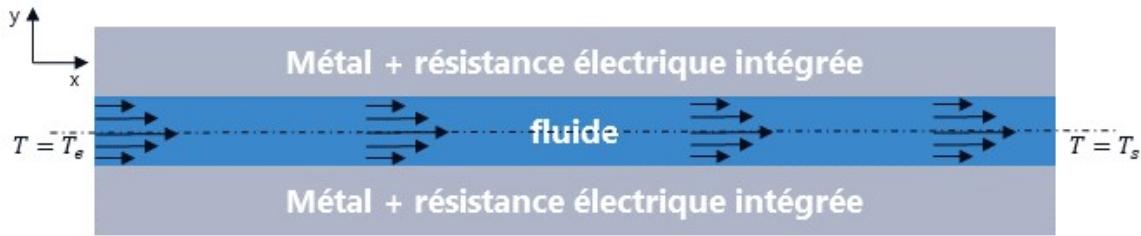


FIGURE 1 – Schéma de principe du réchauffeur à modéliser

Dans ce dispositif, un fluide circule entre deux plaques métalliques chauffées par effet joule à l'aide de résistances électriques situées à l'intérieur des plaques. Le fluide entre par le côté gauche à la température T_e et ressort plus chaud, à la température $T_s(y)$, côté droit. On souhaite étudier comment varie $T_s(y)$, en régime stationnaire, lorsqu'on fait varier certains paramètres : puissance thermique fournie, vitesse du fluide, conductivités du fluide et du solide, distance entre les plaques...

Pour simplifier, on suppose que le problème est bidimensionnel c'est-à-dire que la solution ne dépend que des variables x et y , ce qui revient à négliger les effets liés aux variations en z de la solution devant les effets liés aux variations en x et en y . De plus, en tenant compte de l'axe de symétrie du réchauffeur, on peut se limiter à résoudre le problème sur le domaine $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_s \cup \bar{\Omega}_f$ représenté sur la figure 2 ci-dessous.

1. Equations et conditions aux limites du problème. Dans le solide, l'EDP modélisant le transport de la chaleur en régime stationnaire s'écrit :

$$-k_s \Delta T_s = f_s \quad (1)$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et où T_s désigne la température dans le solide, k_s la conductivité thermique du solide (supposée indépendante de x et y pour simplifier le problème) et $f_s(x, y)$

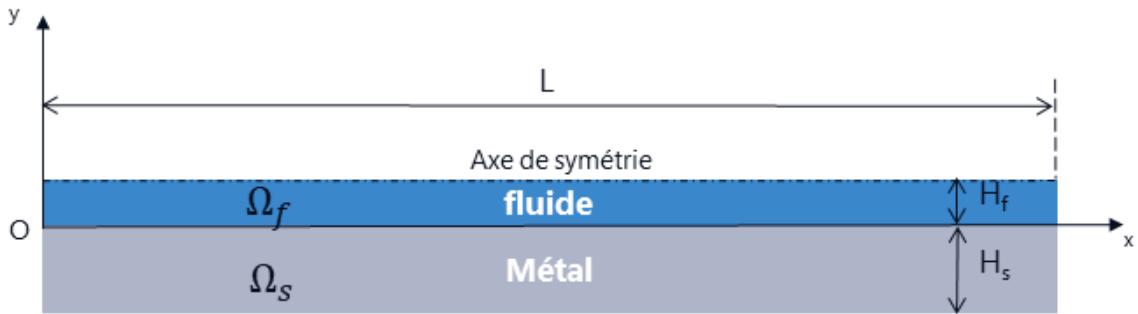


FIGURE 2 – Domaine de calcul de la solution numérique tenant compte de la symétrie du problème

la densité volumique de puissance produite par effet Joule au point (x, y) du solide.

Dans le fluide, la chaleur est transportée à la fois par convection et par diffusion. Compte tenu de la géométrie du réchauffeur, on suppose que la vitesse du fluide est alignée avec la direction x et qu'elle ne dépend que de la variable y (canal de section constante). On la note $u_f(y)$. L'équation de la chaleur dans le fluide s'écrit donc :

$$\rho_f c_f u_f \frac{\partial T_f}{\partial x} - k_f \Delta T_f = 0 \quad (2)$$

où T_f désigne la température dans le fluide, k_f la conductivité thermique du fluide, ρ_f sa masse volumique et c_f sa capacité calorifique massique.

A l'interface entre le fluide et le solide, la température est continue et la conservation de l'énergie impose la continuité du flux de chaleur. L'interface étant alignée avec la direction x , on doit donc avoir :

$$\forall x \in [0, L], \quad k_f \frac{\partial T_f}{\partial y}(x, 0) = k_s \frac{\partial T_s}{\partial y}(x, 0) \quad \text{et} \quad T_f(x, 0) = T_s(x, 0) \quad (3)$$

l'interface solide-fluide qui sépare le domaine occupé par le fluide Ω_f et le domaine occupé par le solide Ω_s étant située en $y = 0$.

On peut regrouper ces trois équations en une seule en les remplaçant par l'équation :

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} - \operatorname{div}(k \vec{\nabla} T) = f \quad (4)$$

où par définition on a posé :

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \begin{cases} \rho_f & \text{si } (x, y) \in \Omega_f \\ \rho_s & \text{si } (x, y) \in \Omega_s \end{cases} & c(x, y) &= \begin{cases} c_f & \text{si } (x, y) \in \Omega_f \\ c_s & \text{si } (x, y) \in \Omega_s \end{cases} \\ k(x, y) &= \begin{cases} k_f & \text{si } (x, y) \in \Omega_f \\ k_s & \text{si } (x, y) \in \Omega_s \end{cases} & f(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in \Omega_f \\ f_s(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_s \end{cases} \end{aligned}$$

$$u(x, y) = \begin{cases} u_f(y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_f \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Omega_s \end{cases} \quad T(x, y) = \begin{cases} T_f(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_f \\ T_s(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_s \end{cases}$$

Le terme $k\vec{\nabla}T$ n'étant pas dérivable (il est même discontinu à l'interface fluide-solide), l'équation (4) doit être interprétée au sens faible et discrétisée avec la méthode des volumes finis qui, contrairement à la méthode des différences finies, ne suppose pas une forte régularité de la solution. Une fonction T continue sur $\overline{\Omega}$, de classe C^2 sur $\overline{\Omega_s}$ et sur $\overline{\Omega_f}$, est dite solution faible de l'EDP (4) si et seulement si pour toute fonction ϕ de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$, nulle sur $\partial\Omega$, on a :

$$\int_{\Omega} \rho c u \frac{\partial T}{\partial x} \phi dx dy + \int_{\Omega} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} \phi dx dy = \int_{\Omega} f \phi dx dy \quad (5)$$

Pour que le problème soit bien posé, il reste à préciser les conditions aux limites à appliquer sur la frontière de $\overline{\Omega}$. Concernant la frontière du domaine solide (à l'exception de l'interface avec le fluide), on supposera qu'elle est isolée thermiquement et on appliquera une condition de Neumann homogène. On aura donc :

$$\begin{cases} \partial_x T(0, y) = 0, & \forall y \in [0, H_f] \\ \partial_x T(L, y) = 0, & \forall y \in [0, H_f] \\ \partial_y T(x, -H_s) = 0 & \forall x \in [0, L] \end{cases} \quad (6)$$

Sur les bords du domaine fluide, il faut distinguer trois cas. En $x = 0$ et $y \in [0, H_f]$ (entrée du fluide), on supposera que la température du fluide est imposée. En $x = L$ et $y \in [0, H_f]$ (sortie du fluide), on fera l'hypothèse que le flux de chaleur conductif est nul. Enfin en $y = H_f$ et $x \in [0, L]$ (bord supérieur), on appliquera une condition de symétrie. Finalement, les conditions aux limites correspondant aux frontières extérieures du domaine fluide seront donc les suivantes :

$$\begin{cases} T(0, y) = T_e & \forall y \in [0, H_f] \\ \partial_x T(L, y) = 0 & \forall y \in [0, H_f] \\ \partial_y T(x, H_f) = 0 & \forall x \in [0, L] \end{cases} \quad (7)$$

2. Données physiques du problème. Les valeurs par défaut des paramètres physiques et géométriques sont résumées dans le tableau suivant :

ρ_f	c_f	k_f	k_s	H_s	H_f	L
$kg\ m^{-3}$	$J\ kg^{-1}$	$W\ m^{-1}\ K^{-1}$	$W\ m^{-1}\ K^{-1}$	m	m	m
1000	4180	0.60	16	0.025	0.01	1.0

L'expression de la vitesse du fluide est la suivante :

$$u_f(y) = u_{max} \left(2 \frac{y}{H_f} - \frac{y^2}{H_f^2} \right) \quad (8)$$

On note que u_f est nulle en $y = 0$ (condition d'adhérence du fluide à la paroi du solide) et u_f est maximale en $y = H_f$, sa dérivée s'annulant en $y = H_f$ par symétrie. Par défaut

on prendra : $u_{max} = 0.001 \text{ m s}^{-1}$.

Enfin pour le terme source modélisant la dissipation de chaleur par effet Joule au sein du métal, on utilisera l'expression suivante :

$$f_s(x, y) = \begin{cases} P_{dis}, & \forall(x, y) \in [x_l, x_r] \times [y_b, y_t] \\ 0, & \forall(x, y) \notin [x_l, x_r] \times [y_b, y_t] \end{cases} \quad (9)$$

Les valeurs des paramètres $x_l, x_r, y_b, y_t, P_{dis}$ sont précisées dans le tableau ci-dessous :

x_l	x_r	y_b	y_t	P_{dis}
m	m	m	m	$W \text{ m}^{-3}$
0.1 L	0.9 L	-0.8 H_s	-0.2 H_s	10^5

3. Questions théoriques.

- 1) Soit T_s et T_f des fonctions de classe C^2 respectivement sur $\overline{\Omega_s}$ et sur $\overline{\Omega_f}$. Montrer que si T_s et T_f sont solutions de (1)- (2)-(3) alors la fonction T définie par

$$T(x, y) = \begin{cases} T_f(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_f \\ T_s(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_s \end{cases}$$

est solution faible de (4) et vérifie donc (5) pour toute fonction ϕ de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$, nulle sur $\partial\Omega$.

- 2) Réciproquement, montrer que si T est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, de classe C^2 sur $\overline{\Omega_s}$ et sur $\overline{\Omega_f}$, solution faible de (4), alors ses restrictions T_s , respectivement T_f , à $\overline{\Omega_s}$, respectivement $\overline{\Omega_f}$, vérifient (1)- (2)-(3).
- 3) Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions C^2 vérifiant (1)- (2)-(3) et les conditions aux limites (6)- (7).
- 4) Si T est une solution faible régulière de (4) et C un ouvert quelconque, de frontière régulière et inclus dans Ω , montrer que :

$$\int_{\partial C} \rho c T \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \int_{\partial C} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} dS = \int_C f(x, y) dx dy \quad (10)$$

où $\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$. Dans la démonstration, on considérera trois cas : le cas où C est inclus dans Ω_s , le cas où C est inclus dans Ω_f et le cas où C est à cheval sur Ω_s et Ω_f .

- 4) Montrer que la solution du problème (1)- (2)-(3)-(6)- (7) vérifie :

$$\int_0^{H_f} \rho_f c_f u_f(y) T_f(L, y) dy - \int_0^{H_f} \left(\rho_f c_f u_f(y) T_e - k_f \frac{\partial T_f}{\partial x}(y) \right) dy = \int_{\Omega_s} f_s(x, y) dx dy \quad (11)$$

et donner la signification physique de cette relation.

4. Discrétisation du problème et programmation en Python. Pour discrétiser le problème, on utilise la méthode des volumes finis en s'appuyant sur l'équation (10).

Compte tenu de la forme géométrique simple du domaine de calcul, on choisit de localiser les valeurs de la solution discrète aux noeuds N_{ij} d'une grille régulière de pas constants Δx et Δy (comme pour la méthode des différences finies) et on note T_{ij} la valeur de la solution discrète au noeud N_{ij} .

A chaque noeud N_{ij} on associe un volume de contrôle C_{ij} , correspondant au rectangle de centre N_{ij} et de dimensions $\Delta x \times \Delta y$ (voir figure 3 ci-dessous).

- Nœud du maillage = centre d'un volume de contrôle

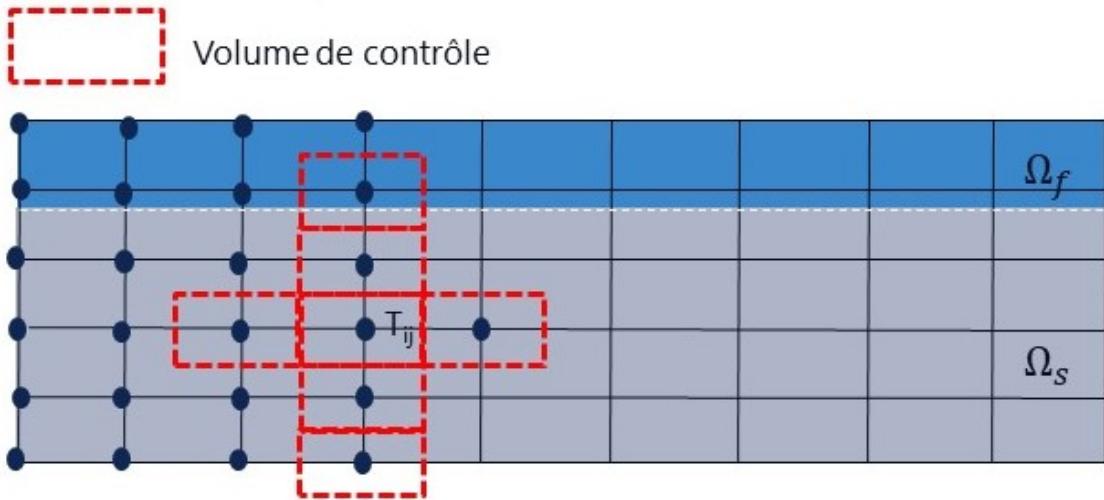


FIGURE 3 – Maillage du domaine de calcul et volumes de contrôle associés

Pour chacun des volumes de contrôle, on applique l'équation (10) en remplaçant C par C_{ij} , ce qui donne :

$$\int_{\partial C_{ij}} \rho c \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \int_{\partial C_{ij}} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} dS = \int_{C_{ij}} f(x, y) dx dy \quad (12)$$

Il reste maintenant à préciser comment on discrétise chacun des trois termes de (12).

Le problème discret comporte $L = IJ$ inconnues, que l'on peut étiqueter indifféremment soit par un numéro global l variant entre 0 et $L - 1$, soit par un double indice (i, j) avec i variant de 0 à $I - 1$ et j variant de 0 à $J - 1$. On peut donc noter T_l la valeur de la solution discrète dans le volume de contrôle $C_l = C_{ij}$ où l désigne le numéro global du noeud N_{ij} . Si on adopte l'ordre lexicographique, on a la relation : $l = i + j * I$.

Comme le montre la figure 3, le volume de contrôle C_l est entouré de 4 volumes de contrôle voisins dont les numéros peuvent être notés respectivement l_o pour celui situé à gauche,

l_e pour celui situé à droite, l_s pour celui situé en dessous, l_n pour celui situé au dessus. Avec ces notations, on peut discréteriser l'équation (12) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho_f c_f \bar{u}_l [T_l - T_{l_o}] \Delta y + \bar{k}_o \frac{T_l - T_{l_o}}{\Delta x} \Delta y - \bar{k}_e \frac{T_{l_e} - T_l}{\Delta x} \Delta y \\ + \bar{k}_s \frac{T_l - T_{l_s}}{\Delta y} \Delta x - \bar{k}_n \frac{T_{l_n} - T_l}{\Delta y} \Delta x = \bar{f}_l \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (13)$$

Questions.

- 1) Justifier la formule (13) et donner les expressions de \bar{u}_l , \bar{k}_e , \bar{k}_o , \bar{k}_n , \bar{k}_s et \bar{f}_l . Pour trouver les expressions de \bar{k}_e , \bar{k}_o , \bar{k}_n et \bar{k}_s , on tiendra compte de la position de l'interface solide-fluide et on se servira du fait que $\partial_x T$ et $k \partial_y T$ sont continus à travers l'interface.
- 2) Comment doit on modifier (13) pour tenir compte de conditions aux limites ?
- 3) Montrer qu'on peut réécrire l'équation (13) (y compris sa variante pour les noeuds situés à la frontière du domaine de calcul) sous forme matricielle : $AT = S$, avec A une matrice creuse de dimension $L \times L$ et S, T des vecteurs de \mathbb{R}^L . Quel est le nombre maximum de termes non nuls sur chaque ligne de A ? Donner l'expression des termes diagonaux $A(l, l)$ et des termes extra-diagonaux $A(l, l_o)$, $A(l, l_e)$, $A(l, l_s)$, $A(l, l_n)$. Donner également l'expression du terme général de S .
- 4) Ecrire l'algorithme permettant d'assembler la matrice A en parcourant tous les noeuds du maillage. Idem pour le second membre S .
- 5) Compléter le programme Python fourni et écrire les fonctions permettant d'assembler la matrice A et le second membre S .

5. Calcul de la solution numérique et analyse des résultats

- 1) En changeant la valeur de certains paramètres par rapport à la valeur par défaut, proposer un cas test simple permettant de vérifier le bon comportement de votre programme.
- 2) Une fois ce test réalisé, revenir aux valeurs par défaut de la section 2 "Données physiques et géométriques" et calculer la solution correspondante. Tracer le champ de température à l'aide de la fonction Python "contourf" ainsi que les profils de température $y \rightarrow T(x, y)$ à x fixé pour 5 valeurs de x : $x = 0, x = 0.25L, x = 0.5L, x = 0.75L, x = L$. Commenter la forme et l'évolution suivant x des profils de température. On fera le calcul pour $I = J = 20$, $I = J = 50$ et $I = J = 100$. On commenterá l'influence du nombre de noeuds sur les résultats.
- 3) Calculer numériquement à l'aide de fonctions Python dédiées les trois intégrales intervenant dans la formule (11) et montrer que la relation est bien satisfaite aux erreurs numériques près .
- 4) On s'intéresse à l'influence de la vitesse sur le profil de température du fluide en sortie. Refaire le calcul de la question 2) pour $u_{max} = 0.0005 \text{ m s}^{-1}$ puis pour $u_{max} = 0.002 \text{ m s}^{-1}$. Que peut on observer ? En donner une explication qualitative.
- 5) On s'intéresse maintenant à l'influence de l'épaisseur du canal H_f sur le profil de température dans le fluide en sortie. Refaire le calcul de la question 2) en gardant

$u_{max} = 0.001 \text{ m s}^{-1}$ mais en prenant $H_f = 0.02 \text{ m}$ puis $H_f = 0.005 \text{ m}$. Que peut on observer ? En donner une explication qualitative.

- 6) Pour finir, on fait varier cette fois la masse volumique du fluide. Refaire le calcul de la question 2) en gardant $u_{max} = 0.001$, $H_f = 0.01 \text{ m}$ mais en prenant $\rho_f = 500 \text{ kg m}^{-3}$ puis $\rho_f = 2000 \text{ kg m}^{-3}$. Que peut on observer ? En donner une explication qualitative.
- 7)* A partir de l'équation (4), montrer que la solution ne dépend que de 4 nombres sans dimension dont on donnera l'expression. Vérifier le par des tests numériques.