Chapitre II: Les Postulats. Le Principe de correspondance

I) Description de l'état d'un système

Postulat 1

II) Description des grandeurs physiques

Postulat 2

III) Mesure des grandeurs physiques. Principe de décomposition spectrale

Postulat 3, postulat 4

IV) Réduction du paquet d'ondes

Postulat 5

V) Evolution des systèmes dans le temps

Postulat 6: équation de Schrödinger

VI) Règles de quantification et principe de correspondance

Opérateurs **P** et **R**

VII) Retour sur l'interprétation de la fonction d'onde

VIII) Valeur moyenne d'une observable et écart quadratique moyen

IX) Commutation des observables. Relations d'incertitude généralisées

ECOC, relations de Heisenberg

Chapitre II: Les Postulats. Le Principe de correspondance

En physique classique:

- A l'instant $t = t_0$, l'état du système est donné par :

  Ses 3 coordonnées spatiales (x,y,z) et les 3 coordonnées du vecteur vitesse (V_x,V_y,V_z)
- L'évolution du système est régie par le principe fondamental de la dynamique
- On peut prédire de façon **certaine**, connaissant l'état du système à $t = t_0$, le résultat d'une mesure quelconque (par exemple la mesure de la position d'une particule)

  Ceci n'est plus vrai dans le cadre de la physique quantique

I) Description de l'état d'un système

Postulat 1:

A un instant $t = t_0$ donné, l'état d'un système est décrit par la donnée d'un ket $|\psi(t=t_0)\rangle$ appartenant à l'espace des états $\mathcal{E}$

II) Description des grandeurs physiques

Postulat 2 :

Toute grandeur physique mesurable $\mathcal{A}$ est décrite par un opérateur $\hat{A}$ agissant sur $\mathcal{E}$. Cet opérateur est une observable

III) Mesure des grandeurs physiques. Principe de décomposition spectrale

Postulat 3 :

La mesure d'une grandeur physique $\mathcal{A}$ ne peut donner comme résultat qu'une des valeurs propres de l'observable $\hat{A}$ correspondante

Remarque importante : les valeurs d'une mesure sont réelles, ce qui est en accord avec le fait que les valeurs propres d'une observable $\hat{A}$ soient réelles (car $\hat{A}$ est hermitique)

Supposons un système dans une état $|\psi\rangle$ **normé :** $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

Le résultat de la mesure de la grandeur $\mathcal{A}$ **n'est pas certain**. On peut obtenir chacune des valeurs propres de Â **avec une probabilité donnée**

1) Cas des observables Â présentant un spectre discret

a) Les valeurs propres de Â sont non dégénérées

Postulat 4 (cas du spectre discret non dégénéré):

Lorsque l'on mesure la grandeur physique $\mathcal{A}$ sur un système dans l'état $|\psi\rangle$ normé, la probabilité $P(a_n)$ d'obtenir comme résultat la valeur propre non dégénérée a_n de l'observable Â correspondante est :

$$P(a_n) = \left|\langle u_n|\psi\rangle\right|^2$$

où $|u_n\rangle$ est le vecteur propre normé de Â associé à la valeur propre a_n

Remarque : un facteur de phase global $e^{i\theta}$ n'affecte pas le résultat des mesures

Soit $|\psi'\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$

Les probabilité des résultats de mesure sont les mêmes pour $|\psi\rangle$ et $|\psi'\rangle$

$|\psi\rangle$ et $|\psi'\rangle$ décrivent le même état physique

b) Les valeurs propres de Â sont dégénérées

Postulat 4 (cas du spectre discret dégénéré) :

Lorsque l'on mesure la grandeur physique $\mathcal{A}$ sur un système dans l'état $|\psi\rangle$ normé, la probabilité $P(a_n)$ d'obtenir comme résultat la valeur propre dégénérée a_n de l'observable Â correspondante est :

$$P(a_n) = \sum_{i}^{g_n} \left| \langle u_n^i | \psi \rangle \right|^2$$

où g_n est le degré de dégénérescence de a_n et $\left\{ |u_n^i\rangle \right\}$ $(i=1,2,\ldots g_n)$ est le système orthonormé de vecteurs formant une base du sous espace propre ε_n associé à la valeur propre a_n de Â

2) Cas des observables Â présentant un spectre continu et non dégénéré

Postulat 4 (cas du spectre continu non dégénéré) :

Lorsque l'on mesure la grandeur physique $\mathcal{A}$ sur un système dans l'état $|\psi\rangle$ normé,

la probabilité dP(α) d'obtenir un résultat entre α et α+d α vaut :

$$dP(\alpha) = \left|\langle u_\alpha | \psi \rangle\right|^2 d\alpha$$

Où $|u_\alpha\rangle$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre α de l'observable Â associée à la grandeur $\mathcal{A}$

Remarque générale: si l'état $|\psi\rangle$ sur lequel est effectué la mesure n'est pas normé,
Il faut diviser les formules données pour les probabilités par $\langle \psi | \psi \rangle$ (carré de la norme)

IV) Réduction du paquet d'ondes

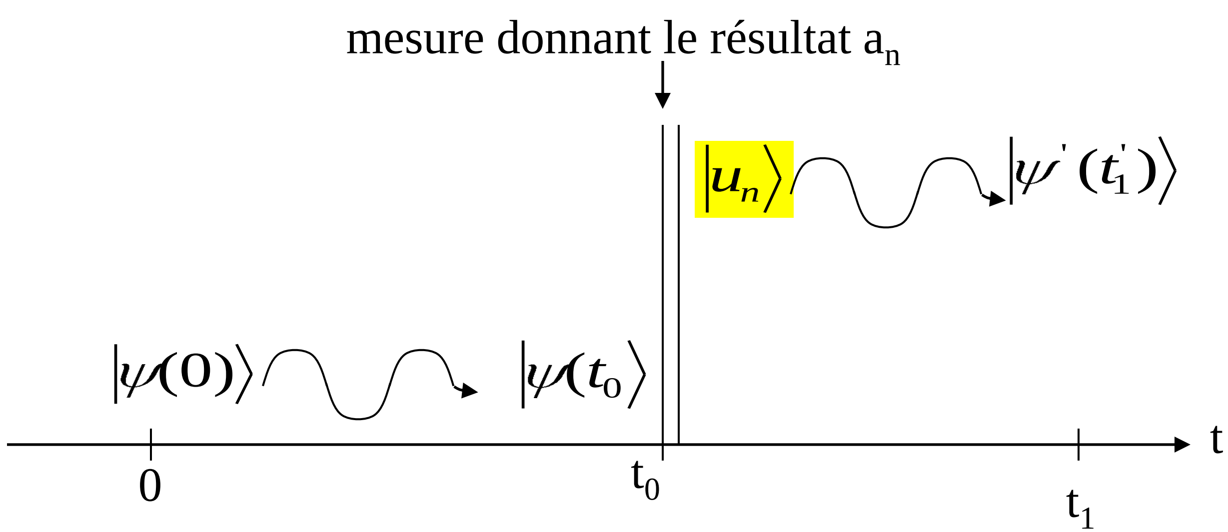
Idée: le fait d'effectuer une mesure modifie l'état du système physique étudié C'est un point très important de la théorie quantique.

a) Cas des valeurs propres de Â non dégénérées

Postulat 5 :

Si la mesure de la grandeur $\mathcal{A}$ donne une valeur propre a_n non dégénérée de l'observable Â, alors l'état du système immédiatement après cette mesure est le vecteur propre $|u_n\rangle$ associé à a_n

$$|\psi\rangle \longrightarrow |u_n\rangle$$



Remarque importante: si on effectue une deuxième mesure de la grandeur $\mathcal{A}$ aussitôt après la première (avant que le système n'ait eu le temps d'évoluer), on trouvera à coup sur le même résultat a_n puisque l'état du système immédiatement avant la seconde mesure est $|u_n\rangle$

b) Cas des valeurs propres de Â dégénérées

$$|\psi\rangle = \sum_n \sum_i^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle$$

Modification par la mesure:

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{\sum_i^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle}{\sqrt{\sum_i^{g_n} |c_n^i|^2}}$$

$|\psi_n\rangle = \sum_i^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle$ est la projection du ket $|\psi\rangle$ sur le sous espace propre associé à a_n

$|\psi\rangle$ a été réduit par la mesure à sa projection normée
(on parle de réduction du paquet d'onde)

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle}}$$

Rq) $\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_n\,\hat{P}_n|\psi\rangle} = \sqrt{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle}$ car $\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n$

Postulat 5 :

Si la mesure de la grandeur physique $\mathcal{A}$ sur le système dans l'état $|\psi\rangle$ donne le résultat a_n, l'état du système immédiatement près la mesure est la projection normée $\frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle}}$ de $|\psi\rangle$ sur le sous-espace propre associé à a_n

L'état du système aussitôt après la mesure est donc toujours un vecteur propre de Â de valeur propre a_n , comme dans le cas non-dégénéré

V) Evolution des systèmes dans le temps

Nous mentionnons ici le sixième postulat concernant l'évolution des systèmes dans le temps, mais nous reviendrons en détail sur ce point dans le chapitre III

Postulat 6 :

L'évolution dans le temps de $|\psi\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle$$

$\hat{H}$ est le Hamiltonien du système. C'est l'observable correspondant à l'énergie totale du système. Cette observable joue un rôle capital en Physique quantique car elle conditionne l'évolution temporelle du système

VI) Règles de quantification et principe de correspondance

1) Les opérateurs $\hat{\mathbf{R}}$ et $\hat{\mathbf{P}}$

a) Opérateur $\hat{\mathbf{R}}$

– On définit l'opérateur $\hat{X}$:

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \hat{X}|\psi\rangle$$

Action de $\hat{X}$ en répresentation r

tel que : $\boxed{\langle \mathbf{r}|\psi'\rangle = \langle \mathbf{r}|\hat{X}|\psi\rangle = x\psi(\mathbf{r})}$

– de même, on définit les opérateurs $\hat{Y}, \hat{Z} \longrightarrow$ on obtient l'opérateur $\hat{\mathbf{R}} \left| \begin{array}{l} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{array} \right.$

b) Opérateur $\hat{\mathbf{P}}$

– On définit l'opérateur : $\hat{P}_X$

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \hat{P}_X|\psi\rangle$$

Action de $\hat{P}_X$ en répresentation r

tel que: $\boxed{\langle \mathbf{r}|\hat{P}_X|\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\left(\langle \mathbf{r}|\psi\rangle\right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(\mathbf{r})\right)}$

– de même, on définit les opérateurs $\hat{P}_Y$, $\hat{P}_Z \longrightarrow$ on obtient l'opérateur

$$\hat{\mathbf{P}} \left| \begin{array}{l} \hat{P}_X \\ \hat{P}_Y \\ \hat{P}_Z \end{array} \right.$$

En représentation **r** , l'action de $\hat{X} \longrightarrow .x$

de même $\hat{Y} \longrightarrow .y$

$\hat{Z} \longrightarrow .z$

En représentation **r** , l'action de $\hat{P}_X \longrightarrow -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$

de même $\hat{P}_Y \longrightarrow -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y}$

$\hat{P}_Z \longrightarrow -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}$

donc $\hat{\mathbf{P}} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$

$-i\hbar\,\vec{g}rad$

c) Les propriétés de $\hat{\mathbf{R}}$ et $\hat{\mathbf{P}}$

– $\hat{\mathbf{R}}\, et\, \hat{\mathbf{P}}(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, \hat{P}_X, \hat{P}_Y, \hat{P}_Z)$ sont hermitiques. Ce sont des observables

$\hat{X}$ est associé à la grandeur physique position $\mathcal{X}$ suivant l'axe des x ($\hat{Y}$ à $\mathcal{Y}$, $\hat{Z}$ à $\mathcal{Z}$)

$\hat{P}_X$ est associé à la grandeur physique impulsion $\mathcal{P}_x$ selon l'axe des x ($\hat{P}_Y$ à $\mathcal{P}_y$, $\hat{P}_Z$ à $\mathcal{P}_z$)

NB : l'opérateur $\hat{\mathbf{P}}$ est associé à la grandeur physique impulsion $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ qui coïncide avec la quantité de mouvement m**v** en l'absence de champ magnétique

– Les kets propres de $\hat{X}$ sont les kets $|\mathbf{r}\rangle$ associés aux valeurs propres x (spectre continu)

Les kets propres de $\hat{Y}$ sont les kets $|\mathbf{r}\rangle$ associés aux valeurs propres y (spectre continu)

Les kets propres de $\hat{Z}$ sont les kets $|\mathbf{r}\rangle$ associés aux valeurs propres z (spectre continu)

– Les kets propres de $\hat{P}_X$ sont notés kets $|\mathbf{p}\rangle$ associés aux valeurs propres p_x (spectre continu)

Les kets propres de $\hat{P}_Y$ sont notés kets $|\mathbf{p}\rangle$ associés aux valeurs propres p_y (spectre continu)

Les kets propres de $\hat{P}_Z$ sont notés kets $|\mathbf{p}\rangle$ associés aux valeurs propres p_z (spectre continu)

– Commutation $\left[\hat{R}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\delta_{ij}\hat{I}d$

i : x,y, z

$notation: \left(\hat{R}_x \equiv \hat{X}, \hat{R}_y \equiv \hat{Y}, \hat{R}_z \equiv \hat{Z}\right)$

par exemple: $\left[\hat{X}, \hat{P}_X\right] = i\hbar\hat{I}d$

– $\left[\hat{R}_i, \hat{R}_j\right] = 0$ $\quad\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] = 0$

par exemple: $\left[\hat{X}, \hat{Y}\right] = 0$

2) Règles de quantification et **principe de correspondance**

Supposons une grandeur physique $\mathcal{A}$ dépendant de **r** et **p** $\quad\mathcal{A}$(**r**, **p**)

La question est de savoir comment construire l'observable $\hat{A}$ correspondant à $\mathcal{A}$(**r**, **p**)

L'observable Â quantique décrivant la grandeur physique $\mathcal{A}$ définie classiquement s'obtient en remplaçant dans l'expression de $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$

- **r** (x, y, z) par $\hat{\mathbf{R}}(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$
- **p** (p_x , p_y , p_z) par $\hat{\mathbf{P}}(\hat{P}_X, \hat{P}_Y, \hat{P}_Z)$
- **r.p** par $\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{P}}+\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{R}}\right)$ (car $\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{P}}$ n'est pas hermitique!)

Exemple important : l'énergie totale E d'un système (par exemple d'une particule dans un potentiel), aussi appelée Hamiltonien noté H

Énergie cinétique

$$H=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}+V(\mathbf{r})=\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}+V(x,y,z)$$ ← Grandeur physique

Énergie potentielle

En MQ

$$\hat{H}=\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m}+V(\hat{\mathbf{R}})=\frac{\hat{P}_X^2+\hat{P}_Y^2+\hat{P}_Z^2}{2m}+V(\hat{X},\hat{Y},\hat{Z})$$ ← Opérateur associé

$$\hat{H}|\psi\rangle=\frac{\hat{\mathbf{P}}^2|\psi\rangle}{2m}+V(\hat{\mathbf{R}})|\psi\rangle=\frac{\hat{P}_X^2+\hat{P}_Y^2+\hat{P}_Z^2}{2m}|\psi\rangle+V(\hat{X},\hat{Y},\hat{Z})|\psi\rangle$$

En représentation **r**

$$\langle \mathbf{r}|\hat{H}|\psi\rangle = \frac{\langle \mathbf{r}|\hat{\mathbf{P}}^2|\psi\rangle}{2m} + \langle \mathbf{r}|V(\hat{\mathbf{R}})|\psi\rangle = \langle \mathbf{r}|\frac{\hat{P}_X^2+\hat{P}_Y^2+\hat{P}_Z^2}{2m}|\psi\rangle + \langle \mathbf{r}|V(\hat{X},\hat{Y},\hat{Z})|\psi\rangle$$

$$\longrightarrow H^{rep\,r}(\psi(\mathbf{r})) = \frac{-\hbar^2\Delta\psi(\mathbf{r})}{2m} + V(\mathbf{r}).\psi(\mathbf{r})$$

(démonstration à développer)

Bilan dans la représentation **r**, c'est à dire le formalisme usuel des fonctions d'onde

Opérateur	Opération sur les fonctions d'ondes
$\hat{\mathbf{P}} \longrightarrow$	$-i\hbar\vec{\nabla}$ $-i\hbar\,\vec{g}rad$
$\hat{\mathbf{P}}^2 \longrightarrow$	$-\hbar^2\,\Delta$
$\hat{\mathbf{R}}$ $\hat{X}$ $\longrightarrow$	. x
$\hat{Y}$	. y
$\hat{Z}$	. z
$f(\hat{\mathbf{R}}) \longrightarrow$	. f (**r**) =f(x,y,z)

VII) Retour sur l'interprétation de la fonction d'onde

Pour simplifier, étudions le problème à une dimension
Supposons une particule dans un état $|\psi\rangle$

On va mesurer la grandeur physique position X de la particule, c'est à dire que l'on fait une mesure de la position suivant x dont l'observable correspondante est $\hat{X}^{1D}$

$|x^{1D}\rangle$ est vecteur propre de $\hat{X}^{1D}$ avec la valeur propre x (spectre continu)

En appliquant le postulat 4 :

La probabilité de trouver la valeur propre de $\hat{X}^{1D}$ entre x et x +dx, c'est à dire la probabilité pour que la mesure de la position de la particule donne x à dx près est :

$$dP(x) = \left|\langle x^{1D}|\psi\rangle\right|^2 dx$$

$$dP(x) = |\psi(x)|^2 dx$$

On retrouve l'interprétation traditionnelle de la fonction d'onde !

VIII) Valeur moyenne d'une observable et écart quadratique moyen

1) Valeur moyenne d'une observable

Résultat d'une mesure est non certain $\longrightarrow$ probabilité

Ensemble de mesures $\longrightarrow$ moyenne

La valeur moyenne de l'observable Â dans l'état $|\psi\rangle$ est la moyenne sur un ensemble de mesures du système dans l'état $|\psi\rangle$: $\langle \hat{A} \rangle = \sum_n a_n P(a_n)$

On montre que $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

Démonstration :

$$\langle\hat{A}\rangle=\sum_n a_n P(a_n)=\sum_n a_n\left|\langle u_n|\psi\rangle\right|^2$$

$$=\sum_n a_n\langle\psi|u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle=\sum_n\langle\psi|a_n u_n\rangle\langle u_n|\psi\rangle=\sum_n\left\langle\psi\left|\hat{A}\right|u_n\right\rangle\langle u_n|\psi\rangle$$

$$=\langle\psi|\hat{A}\left(\sum_n|u_n\rangle\langle u_n|\right)|\psi\rangle=\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

2) Ecart quadratique

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta A=\sqrt{\left\langle\left(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle\right)^2\right\rangle}\\ \Delta A=\sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle-\left(\langle\hat{A}\rangle\right)^2}\end{gathered}}$$

car :

$$\left[\left\langle\left(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle\right)^2\right\rangle=\left\langle\hat{A}^2+\langle\hat{A}\rangle^2-2\langle\hat{A}\rangle\hat{A}\right\rangle=\langle\hat{A}^2\rangle+\left\langle\langle\hat{A}\rangle^2\right\rangle-2\langle\hat{A}\rangle\langle\hat{A}\rangle=\langle\hat{A}^2\rangle-\langle\hat{A}\rangle^2\right]$$

IX) Commutation des observables. Relations d'incertitude généralisées

1) Règles concernant les commutateurs

Def : $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$

$$\left[\hat{A},\lambda\hat{B}\right] = \lambda\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = -\left[\hat{B},\hat{A}\right]$$

$$\left[\hat{A},(\hat{B}+\hat{C})\right] = \left[\hat{A},\hat{B}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\right]$$

$$\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C}+\hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]$$

$$\left[\hat{A}, f(\hat{A})\right] = 0$$

2) Observables qui commutent : $\boxed{\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0}$

Si deux observables $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent, on peut construire une base orthonormée de l'espace des états constituée par des vecteurs propres communs à $\hat{A}$ et à $\hat{B}$

Rq) tous les vecteurs propres de $\hat{A}$ (en particulier ceux associés à une valeur propre dégénérée) ne sont pas forcément des vecteurs propres de $\hat{B}$

Considérons un couple (a,b) de valeurs propres de Â et $\hat{B}$ associé à l'état $|ab\rangle$. Le système peut être préparé dans l'état $|ab\rangle$. La mesure donne alors un résultat certain sur Â et sur $\hat{B}$. Ceci est vrai pour tous les états de la base commune. On dit que les deux observables sont compatibles.

On pourrait montrer que si deux observables sont compatibles, l'ordre dans lequel on effectue sur le système les deux mesures successives correspondant à ces observable est sans importance (successives signifie sans laisser le système évoluer entre celles–ci). De même, l'état final du système après la mesure ne dépend pas de l'ordre des mesures.

Si $\boxed{[\hat{A},\hat{B}] \neq 0}$, on dit que les deux observables sont incompatibles.

Les propriétés précédentes ne sont plus vraies

3) Ensembles complets d'observables qui commutent (ECOC)

– Supposons Â une observable associée à la grandeur $\mathcal{A}$ possédant un spectre non-dégénéré

– Supposons que la mesure donne a_n valeur propre de Â

$\longrightarrow$ On sait que le système juste après la mesure est dans l'état $|u_n\rangle$

1 valeur propre $\longleftrightarrow$ 1 vecteur propre

– Supposons maintenant que Â possède un spectre dégénéré et que la mesure donne a_n valeur propre de Â

→ On sait que le système juste après la mesure est dans un état qui appartient au sous espace propre correspondant à a_n

→ On n'a pas d'information complète sur l'état du système

→ Refaire une mesure d'une autre grandeur

Par définition, en ensemble d'observables $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ … est appelé ensemble Complet d'observables qui commutent (ECOC) si

i) Toutes les observables commutent deux à deux

ii) La données des valeurs propres de tous les opérateurs $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ suffit à déterminer un ket propre commun unique

$$\{a_n, b_p, c_r\} \longleftrightarrow |u\rangle = |a_n, b_p, c_r\rangle$$

On peut dire de manière équivalente: un ensemble d'observables $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ est une ECOC s'il existe une base orthonormée de vecteurs propres communs, et si cette base est unique

Ainsi, après une mesure des grandeurs associées aux observables $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ qui a donné pour résultat $\{a_n, b_p, c_r\}$ le système est à coup sûr dans l'état $|u\rangle = |a_n, b_p, c_r\rangle$

4) Relations d'incertitude généralisées

Soit $\hat{F}$ et $\hat{G}$ deux observables et un système dans l'état normé $|\psi\rangle$

On peut montrer que : $\boxed{\Delta F \Delta G \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|\left[\hat{F},\hat{G}\right]|\psi\rangle\right|}$

Par exemple, prenons $\hat{F} = \hat{X}$ et $\hat{G} = \hat{P}_X$

$$\Delta X \Delta P_X \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|\left[\hat{X},\hat{P}_X\right]|\psi\rangle\right| = \frac{1}{2}\left|\langle\psi|i\hbar|\psi\rangle\right| = \frac{1}{2}\hbar$$

de même

$$\Delta X \Delta P_X \geq \frac{1}{2}\hbar$$

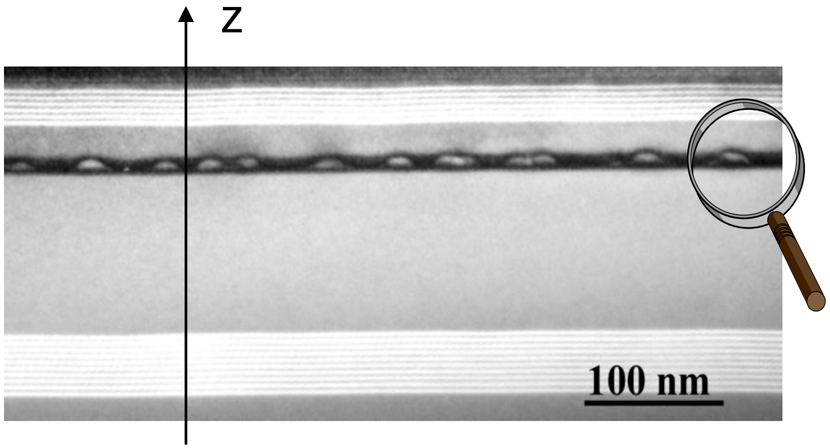
$$\Delta Y \Delta P_Y \geq \frac{1}{2}\hbar$$

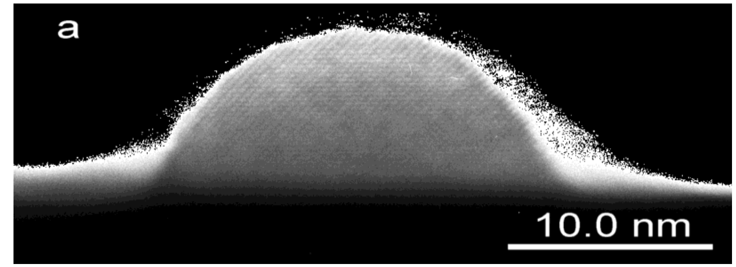
$$\Delta Z \Delta P_Z \geq \frac{1}{2}\hbar$$

Relations d'incertitude de Heisenberg

prenons $\hat{F} = \hat{X}$ et $\hat{G} = \hat{Y}$ $\quad \Delta X \Delta Y \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|\left[\hat{X},\hat{Y}\right]|\psi\rangle\right| = 0$

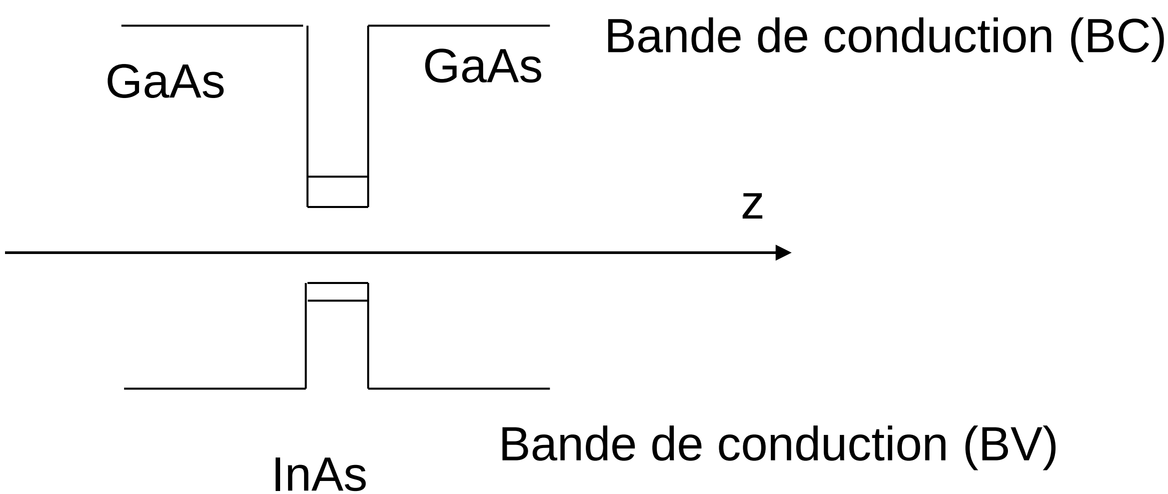
Conclusion : Il n'est pas possible de mesurer simultanément avec une incertitude nulle deux grandeurs dont les observables associées ne commutent pas .
En revanche, ceci devient possible si les deux observables commutent

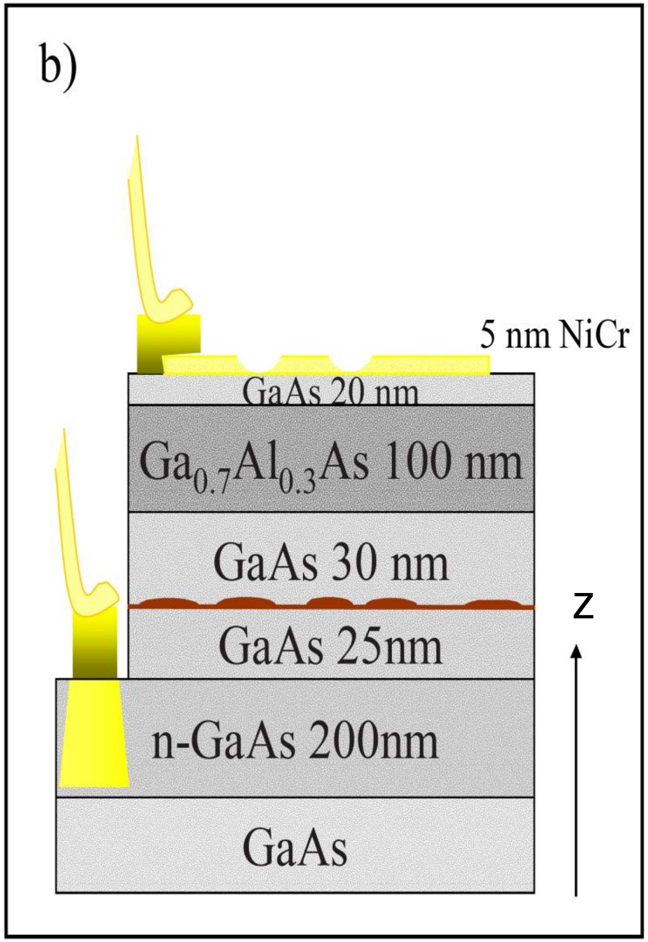




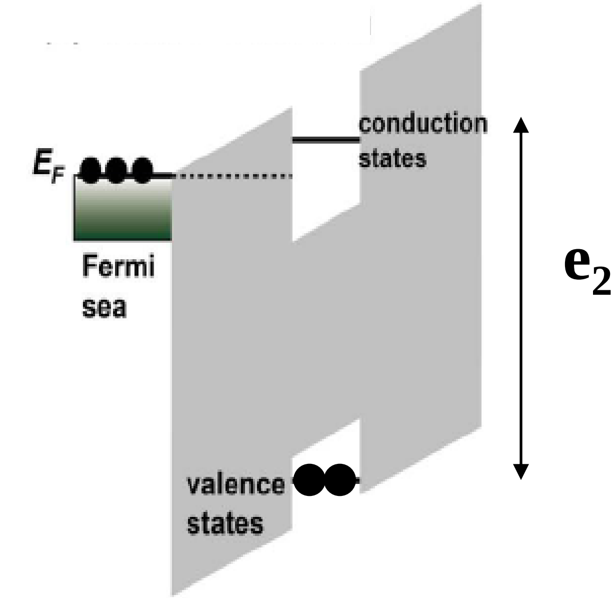
J.P. Mc Caffey *et al.*, JAP 88, 2272(2000)

hauteur ~ 6 nm, diamètre~ 20 nm




b)
5 nm NiCr
GaAs 20 nm
$Ga_{0.7}Al_{0.3}As$ 100 nm
GaAs 30 nm
z
GaAs 25nm
n-GaAs 200nm
GaAs

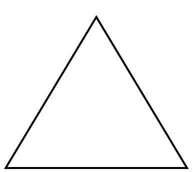
V=0



Etat 2

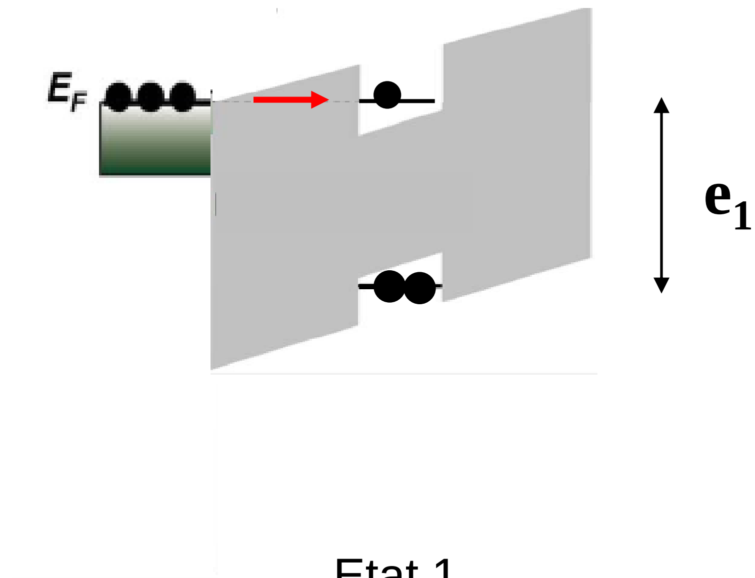
0 électron (de conduction) ds la boîte

$|\psi\rangle_2 \leftrightarrow E_2$



Boîte vide

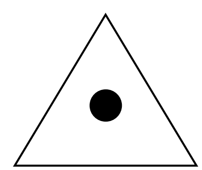
$V>V_{seuil}$



Etat 1

1 électron (de conduction) ds la boîte

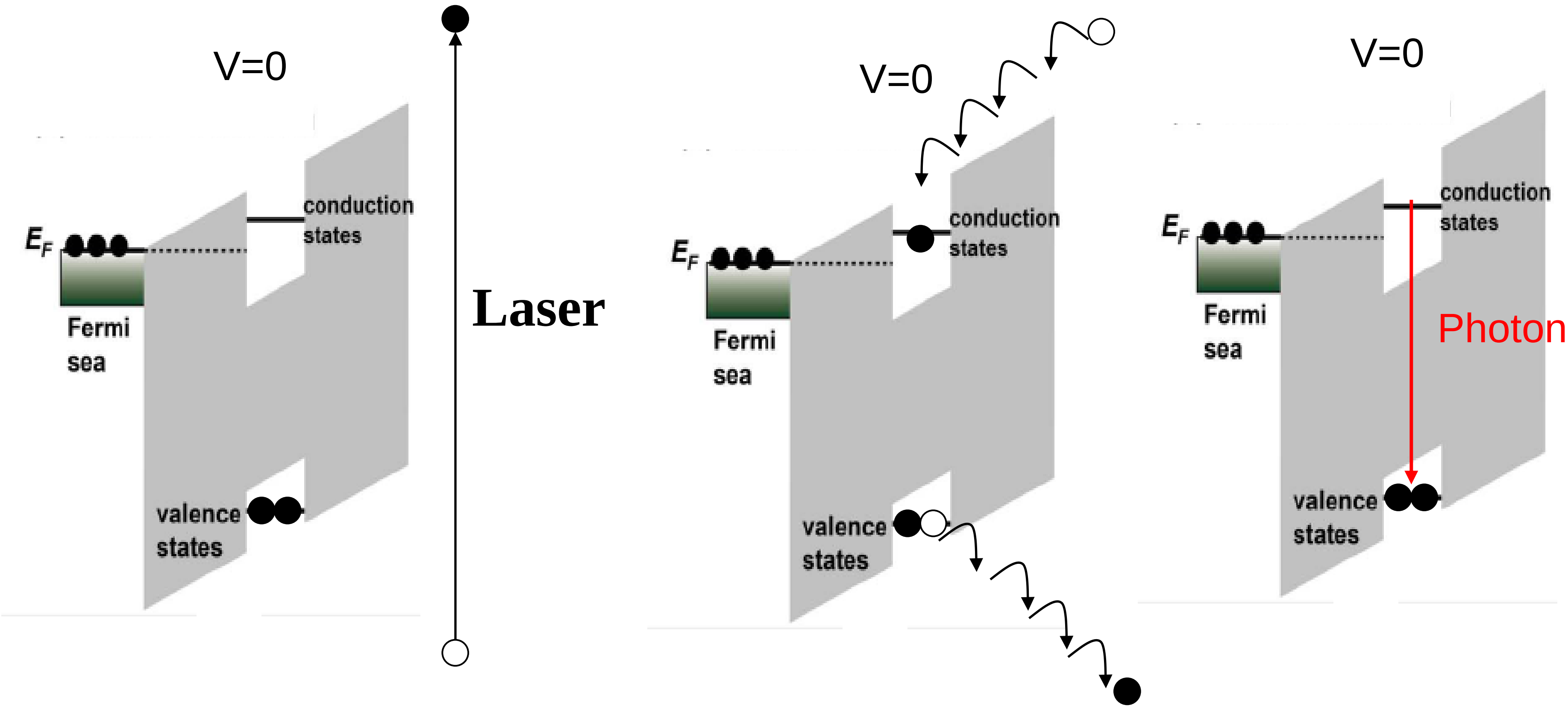
$|\psi\rangle_1 \leftrightarrow E_1$



Boîte chargée

Comment savoir si la boîte est chargée ou pas?

Cas : 0 électron (de conduction) ds la boîte



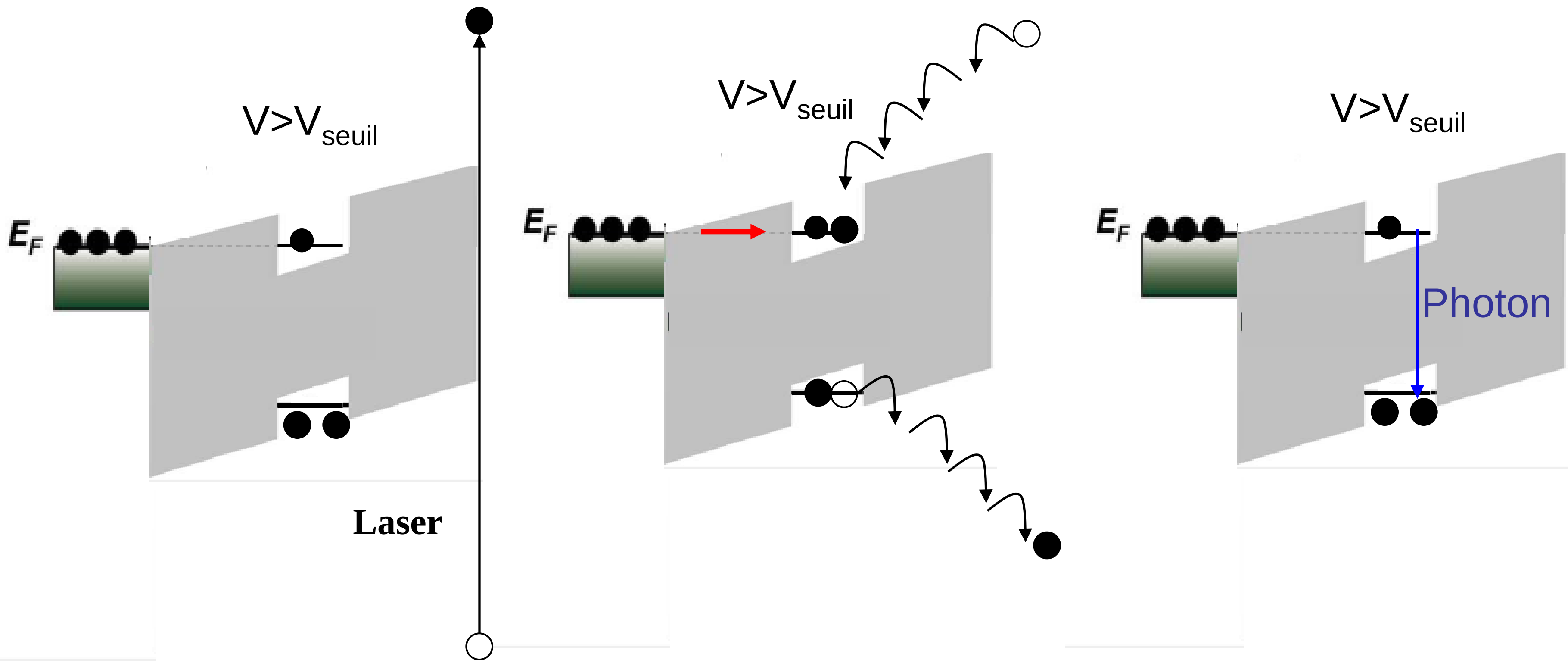
Boîte vide $\longleftrightarrow |\psi\rangle_2 \longleftrightarrow$ **Un photon d'énergie e_2 est émis**

Etat 2

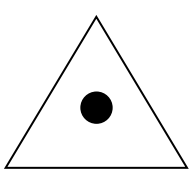
Raie notée X^0

Comment savoir si la boîte est chargée ou pas?

Cas: 1électron (de conduction) ds la boîte

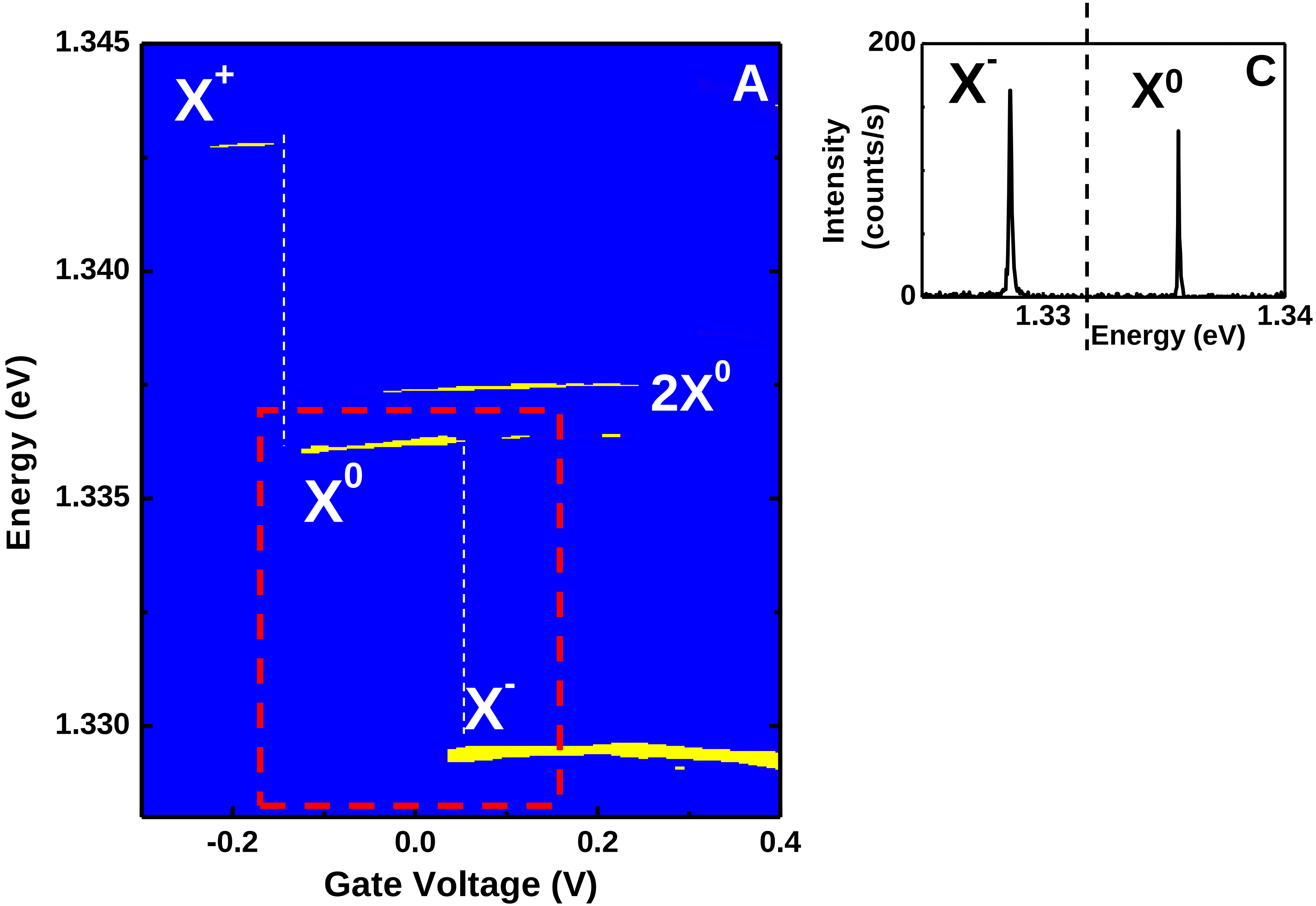


Etat 1

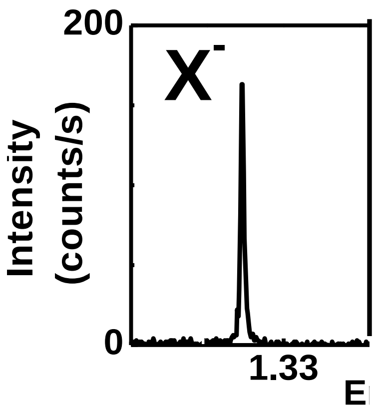


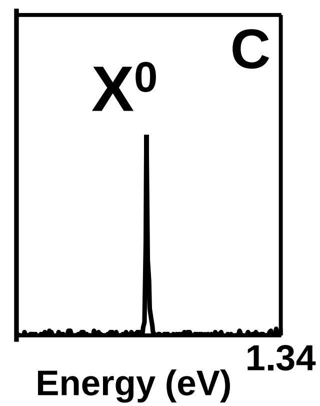
Boîte chargée $|\psi\rangle_1 \longleftrightarrow$ **Un photon d’énergie e_1 ($<e_2$) est émis**

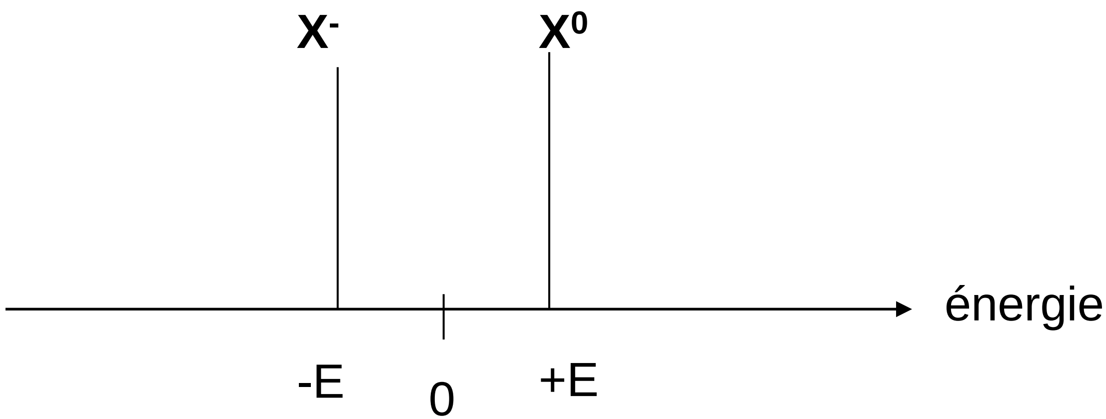
Raie notée X^-



A
C
X+
2X0
X0
X-
1.345
1.340
1.335
1.330
-0.2
0.0
0.2
0.4
Energy (eV)
Gate Voltage (V)
200
0
1.33
1.34
Intensity (counts/s)
Energy (eV)

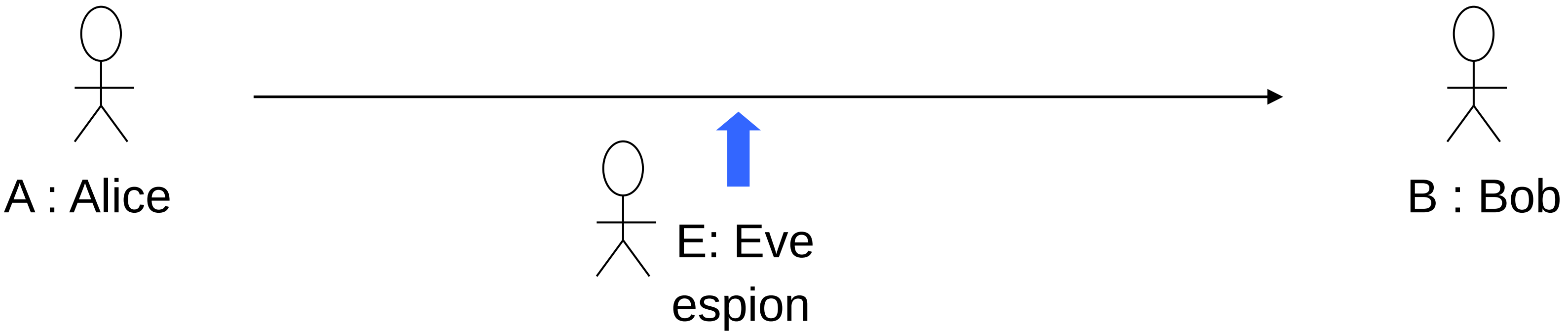

200
X-
Intensity
(counts/s)
0
1.33


C
X0
1.34
Energy (eV)


X-
X0
énergie
-E
0
+E

La cryptographie quantique :

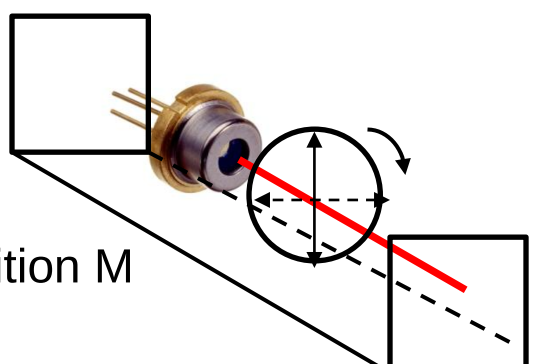
Un exemple concret de l'utilisation des postulats concernant la mesure en mécanique quantique :



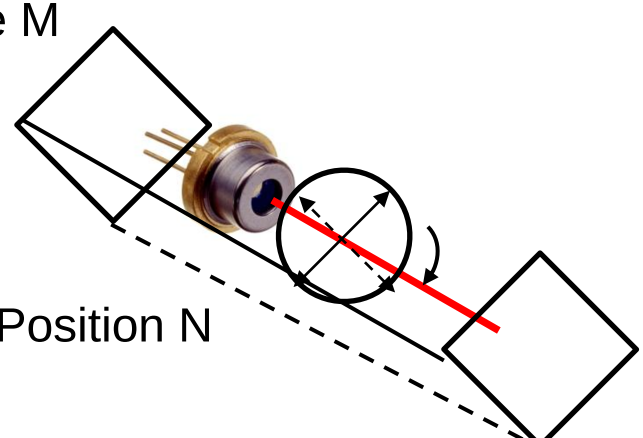
Laser ⟶ Fibre optique ⟶ Détecteur

L'émetteur est constitué d'un système {diode laser + polariseur} avec un polariseur qui peut prendre deux directions ↕ et ↔

De plus, le système {diode laser + polariseur} peut être tourné dans son ensemble de la position initiale M à la position N à 45° de M



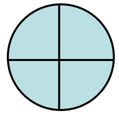
Position M



Position N

Photon polarisé linéairement

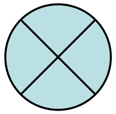
Position M



$|a\rangle$ $|b\rangle$

Bit : 1 0

Position N (à 45 ° de la position M)



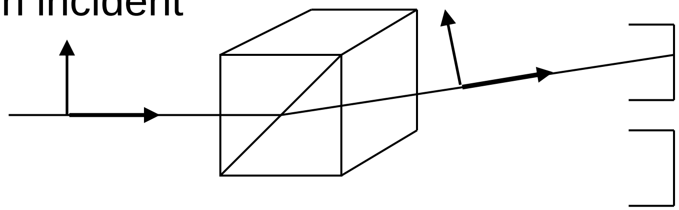
État quantique

$$|c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle + |b\rangle\right) \qquad |d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle - |b\rangle\right)$$

1 0

Détecteur de polarisation : Système {bi-prisme de Wollaston + 2 photodiodes}

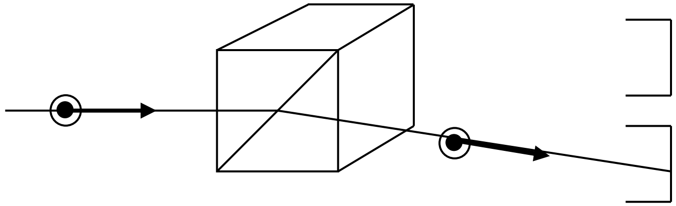
Photon incident



photodiode 1 associée à valeur propre 1

photodiode 2

Photon incident

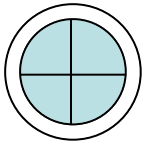


photodiode 1

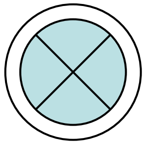
photodiode 2 associée à valeur propre 2

Le Système {bi-prisme de Wollaston + 2 photodiodes} peut être tourné dans son ensemble de la position initiale M à la position N à 45° de M

Position M ↔ observable $\hat{M}$



Position N (à 45 ° de la position M)



↔ Observable $\hat{N}$

Observable $\hat{M}$

État du photon correspondant

2 valeurs propres: 1 associée à $|a\rangle$ ↕

2 associée à $|b\rangle$ ↔

Observable $\hat{N}$

État du photon correspondant

2 valeurs propres: 1 associée à $|c\rangle$ ⤢

2 associée à $|d\rangle$ ⤡

Etat du photon avant la mesure		Observable $\hat{M}$		Observable $\hat{N}$	
	Valeurs propres :	1	2	1	2
Emetteur en position M	↕	1	0	1/2	1/2
	↔	0	1	1/2	1/2
Emetteur en position N	⤢	1/2	1/2	1	0
	⤡	1/2	1/2	0	1

probabilité de trouver la valeur propre s'obtient en appliquant le postulat 4 :

Avant la mesure, le photon est dans l' état $|c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle + |b\rangle\right)$

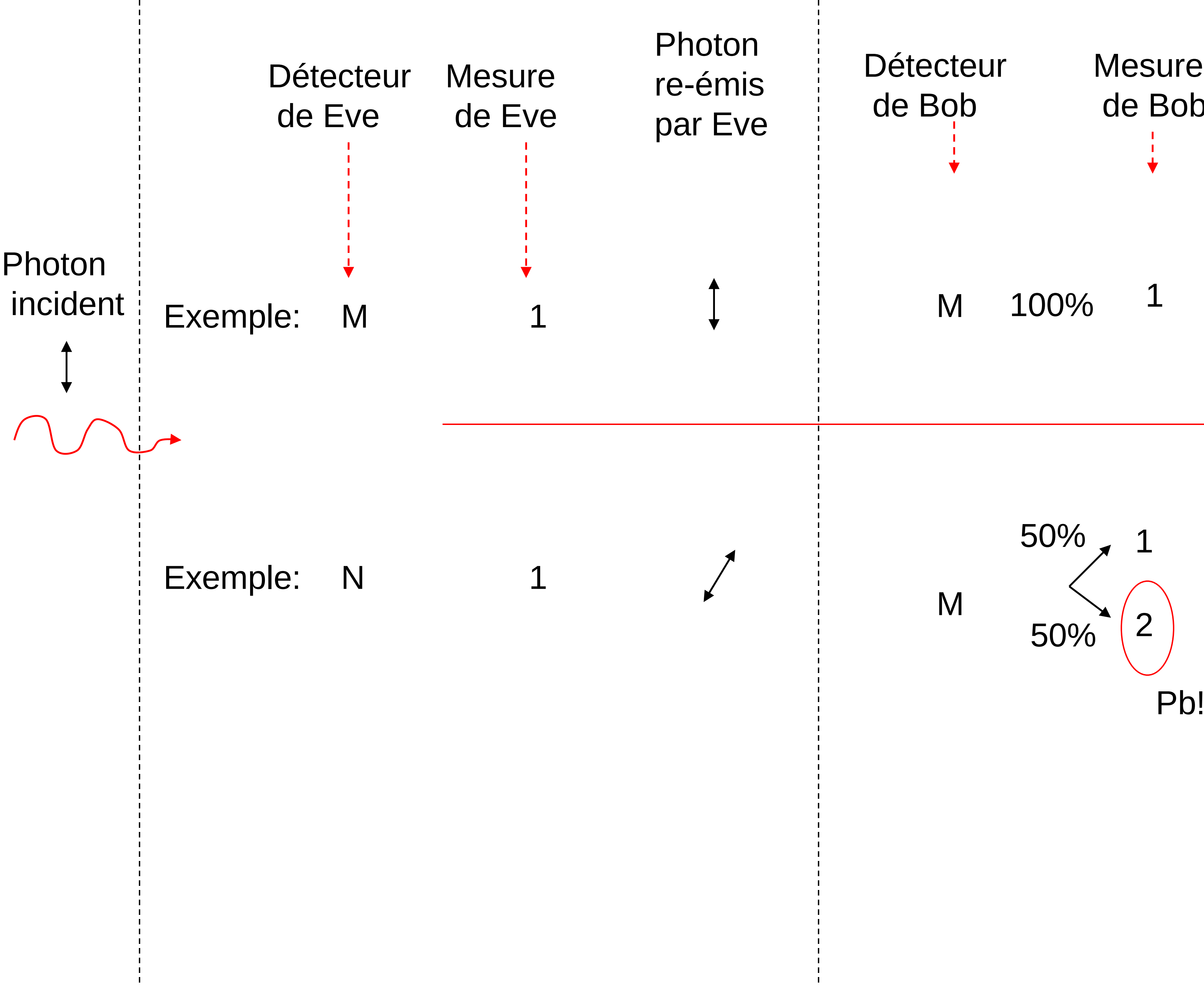
Mesure avec détecteur en position M :

proba d'obtenir 2 = $\left|\langle b|c\rangle\right|^2 = \left|\langle b|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle + |b\rangle\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$

Séquence de bits	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
Position de l’émetteur de A	M	M	M	N	M	M	N	M	M	N	N	M	N	M
polarisation	↕	↕	↕	↘	↔	↕	↗	↕	↔	↗	↘	↔	↗	↕
Position du Détecteur de B	M	N	M	N	M	N	M	M	N	N	M	M	N	N
mesure	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	1	2
Bits reçus	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0

Séquence de bits	1		1	0	0			1		1		0	1	
Position de l’émetteur de A	M		M	N	M			M		N		M	N	
polarisation	↕		↕	↘	↔			↕		↗		↔	↗	
Position du Détecteur de B	M		M	N	M			M		N		M	N	
mesure	1		1	2	2			1		1		2	1	
Bits reçus	1		1	0	0			1		1		0	1	

Supposons maintenant que Eve intercepte ceci


Photon incident
Détecteur de Eve
Mesure de Eve
Photon re-émis par Eve
Détecteur de Bob
Mesure de Bob
Exemple: M
1
M
100%
1
Exemple: N
1
M
50%
1
50%
2
Pb!

Rq: même si Eve se trompe, il y a des chances pour que Bob ne s'en aperçoive pas

Statistiquement si Eve intercepte, certains bits comparés par Alice et Bob seront faux

Protocole BB84 (H.C. Bennett, G. Brassard, 1984)

1) Alice souhaite envoyer un message secret en binaire par une ligne non sécurisée (1,0,0,11….). Pour être décrypté, ce message nécessite une clé courte en binaire

Alice envoie la clé par voie sécurisée (cryptographie quantique)

a) Alice envoie une série de photons polarisés

b) Bob mesure la polarisation de chaque photons en positionnant de manière aléatoire son détecteur en position M ou N

c) Alice communique à Bob par voie non sécurisée les positions successives de l'émetteur

d) Bob communique à Alice par voie non sécurisée les n premières (par ex) valeurs de bits reçus tels que la position de l'émetteur et du récepteur soit commune

e) Alice vérifie la concordance entre les valeurs des n bits envoyés et reçus

d) - Si la concordance n'est pas de 100%, la série a été interceptée

- Si la concordance est de 100%, la série n'a pas été interceptée

Les bits reçus bar Bob autres que les n premiers constitueront la clé

Séquence de bits	1		1	0	0			1		1		0	1
polarisation	↕		↕	⤡	↔			↕		⤢		↔	⤢
Position du Détecteur de B	M		M	N	M			M		N		M	N
mesure	1		1	2	2			1		1		2	1
Bits reçus	1		1	0	0			1		1		0	1

clé

n Bits comparés

Rq1) Ni Alice ni Bob ne peuvent connaître à l'avance quelle sera la séquence qui constituera la clé

2) Alice envoie le message principal en binaire par une ligne non sécurisée

3) À l'aide de la clé, Bob peut décrypter le message envoyé en 2)

Quelques start-ups commencent à commercialiser des produits……

http://www.idquantique.com/index.htm

http://www.magiqtech.com/

MagiQ™

Quantum Information Solutions for the Real World.

Quelques liens bibliographiques:

« Introduction à l'information quantique », M. Le Bellac, édition Belin (2005)

http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_cryptography

http://www.cs.mcgill.ca/~crepeau/CRYPTO/Biblio-QC.html