Matrice d’inertie de solides élémentaires

L’objectif est de montrer que la connaissance

- du moment d’inertie d’une pièce de révolution par rapport à son axe $\int r^2.dm$
- du moment d’inertie d’une pièce cylindrique par rapport au plan perpendiculaire à son axe $\int z^2.dm$ permet de déterminer la plupart des matrices d’inertie des solides simples.

On rappelle

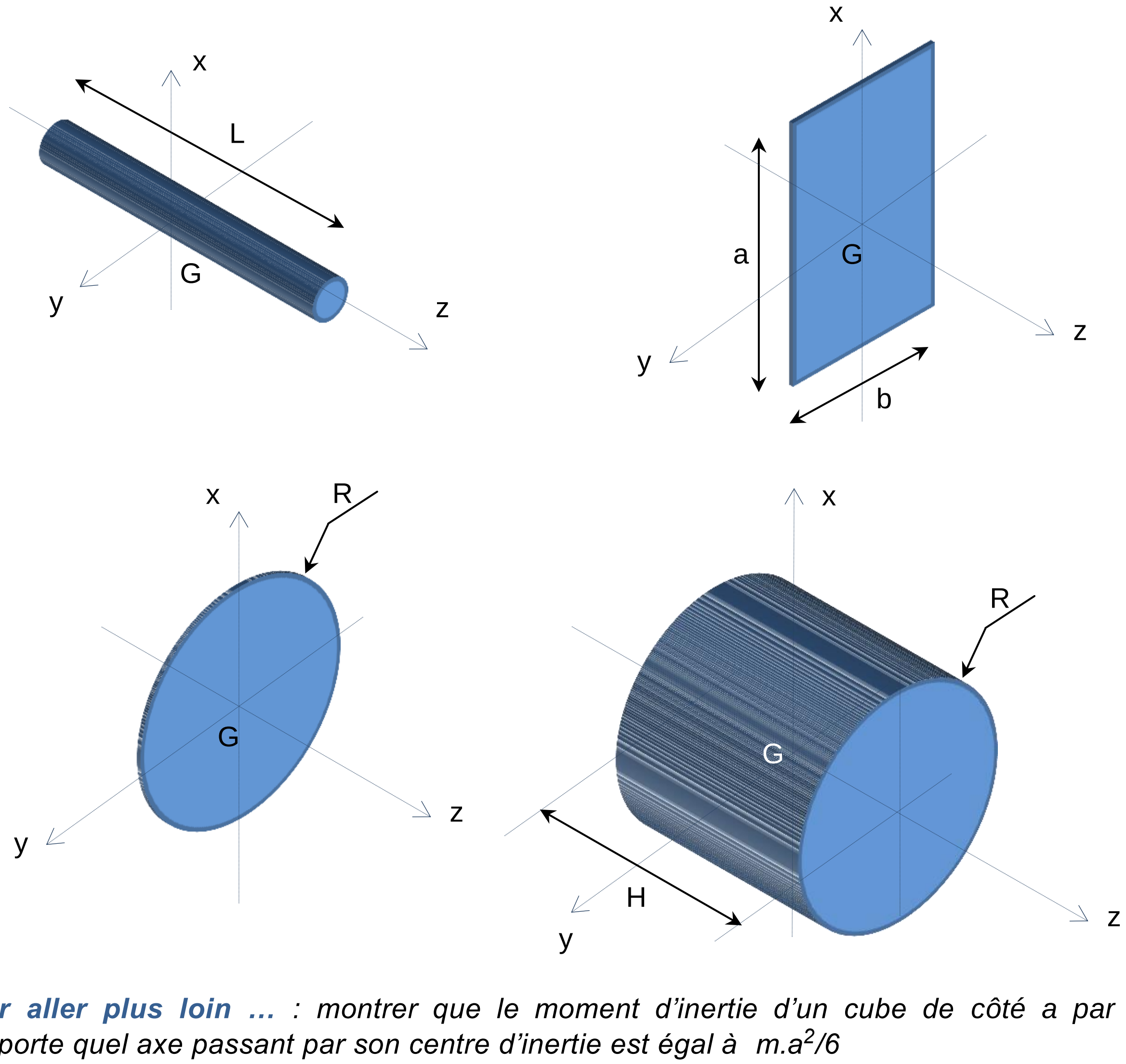
- la matrice d'inertie d'un solide dans une base Gxyz :

$$[I_{G,(S),b_S}] = \begin{pmatrix} \int (y_P^2+z_P^2).dm & -\int (x_P.y_P).dm & -\int (x_P.z_P).dm \\ -\int (x_P.y_P).dm & \int (x_P^2+z_P^2).dm & -\int (y_P.z_P).dm \\ -\int (x_P.z_P).dm & -\int (y_P.z_P).dm & \int (x_P^2+y_P^2).dm \end{pmatrix}$$

- deux plans de symétrie orthogonaux passant par G impliquent les produits d'inertie nuls
- la notion de barre entraine deux composantes nulles (une barre suivant z implique x=y=0)
- la notion de plaque entraîne une composante nulle (une plaque dans le plan xy implique z=0)

Résultat admis *: on démontre mathématiquement que :* $\int_0^R r^2.dm = m.R^2/2$ *et* $\int_{-H/2}^{H/2} z^2.dm = m.H^2/12$

Question 1 *: En déduire les matrices d’inertie des solides suivants en G*

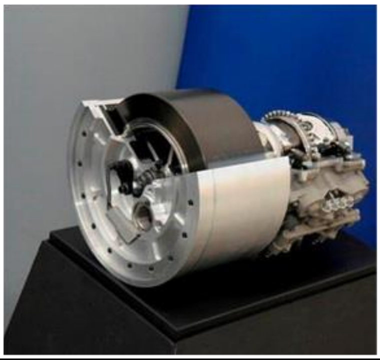


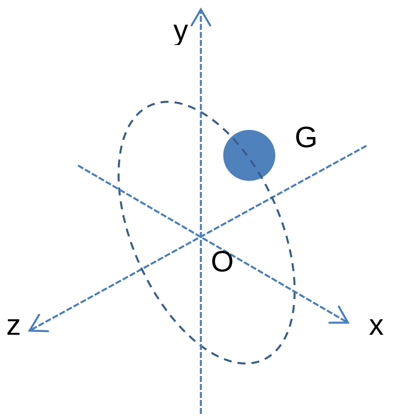
Pour aller plus loin … *: montrer que le moment d’inertie d’un cube de côté a par rapport à n’importe quel axe passant par son centre d’inertie est égal à* $m.a^2/6$

Détermination d’un volant d’inertie

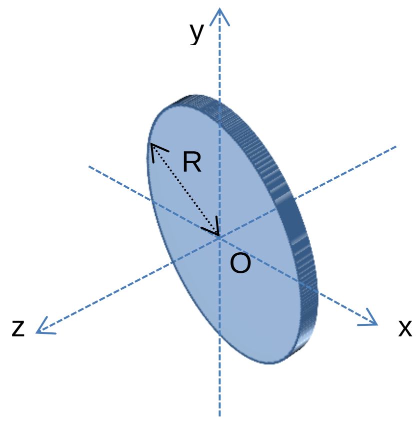
Un volant d'inertie est, dans une machine tournante, une masse liée à la partie animée d'un mouvement de rotation, répartie autour de l'axe de telle sorte qu'elle confère à l'ensemble une plus grande inertie en rotation, dans le but de rendre plus régulier le régime de fonctionnement, en s'opposant aux à-coups dus au moteur entraînant le dispositif ou au récepteur consommant l'énergie transmise.
Son principe repose sur le stockage et la restitution d'énergie cinétique. Sa caractéristique physique est le moment d'inertie qui exprime la répartition des masses autour de l'axe de rotation

Sources Wikipédia

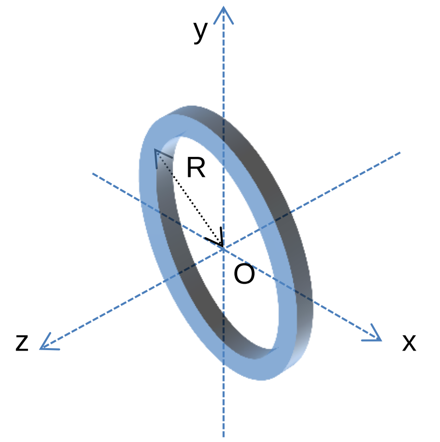




Masse M excentrée de OG=R



Disque plein de rayon R de masse M



Anneau de rayon R de masse M

Objectif de l’étude : déterminer la géométrie d’un volant d’inertie

Question 1 *: Pour les trois solides représentés, déterminer leur moment d’inertie par rapport à l’axe Oz et comparer leurs valeurs.*

On souhaite déterminer un volant d’inertie d’encombrement R_2=25cm, R_1=20cm et d’épaisseur maximale H_{max}=20cm.

On se propose de le réaliser en acier hautement résistant de masse volumique ρ =7800kg/m^3.

Son moment d’inertie doit être égal à 5kg.m^2 ±10%

Question 2 *: Vérifier que les dimensions permettent d'atteindre la valeur souhaitée.*

Le cahier des charges impose une masse maximale de 80kg.

Le cahier des charges est-il respecté ?

Pour des raisons de résistance et de masse, le bureau d’étude souhaite réaliser ce volant d’inertie en Kevlar dont la masse volumique est 1800 kg/m^3. On prend à présent H_{max}=40cm, R_2=30cm et R_1=25cm

Ce volant est il réalisable avec ce cahier des charges ?