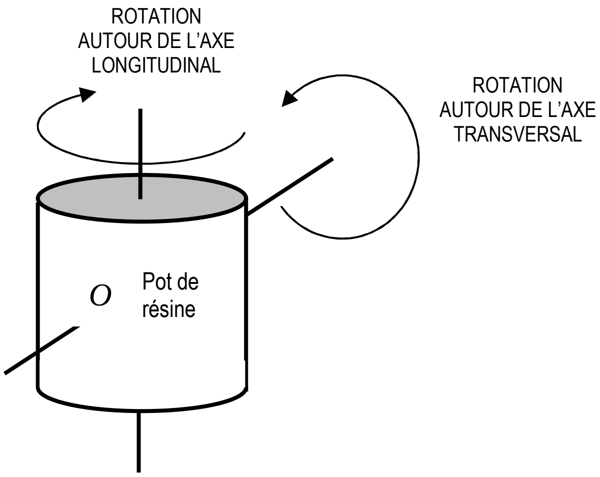
Epreuve de Mécanique (Durée 1H 15') I3ICMG20

Introduction :

*On désire à partir d'une étude dynamique évaluer les efforts de serrage nécessaires au maintien d'un pot de colle ou de résine par les plateaux lors du mélange de ce pot dans un mélangeur industriel **(Figure 1)**. Le mélange de la résine dans un pot s'obtient par les rotations combinées du pot sur lui-même autour de deux axes perpendiculaires en O, ce qui permet d'obtenir rapidement un mélange homogène. Le pot de résine est ainsi mis en rotation autour de son axe de symétrie que l'on appellera axe longitudinal et simultanément autour de son axe transversal.*



Présentation générale du mélangeur :

La modélisation du mélangeur utilisée est définie sur la **Figure 2**. Elle utilise 5 solides : le bâti (1), le moyeu principal (2), le pot de résine (4), le plateau inférieur (3i) et le plateau supérieur (3s). Tous ces solides sont supposés indéformables.

Le repère $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ est supposé galiléen. Dans un premier temps, les plateaux (3s) et (3i) seront considérés comme des solides de masse et d'inertie négligeables.

- Le moyeu principal (2) est en liaison pivot parfaite par rapport au bâti d'axe $(O, \vec{x_1})$. On définit le paramètre angulaire $\alpha = (\vec{y_1}, \vec{y_2})$. Le repère $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ est lié à la pièce (2).

  La matrice d'inertie du moyeu principal (2) en O est défini par : $\left[I_{(O,\mathcal{B}_2,(2))} \right] = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}_2}$

- Le pot de résine (4) est en liaison pivot parfaite par rapport au moyeu principal (2) d'axe $(O, \vec{y_2})$. On définit le paramètre angulaire $\beta = (\vec{z_2}, \vec{z_4})$. Le repère $\mathcal{R}_4 = (O, \vec{x_4}, \vec{y_4}, \vec{z_4})$ est lié à la pièce (4). Le pot de résine (4) sera considéré comme un cylindre homogène plein de rayon R, de hauteur H et de masse M_4. Dans notre étude, le pot de résine sera excentré sur les plateaux et son centre de gravité G sera défini par $\overrightarrow{OG} = X_G . \vec{x_4}$.

  La matrice d'inertie du pot de résine (4) en G est défini par : $\left[I_{(G,\mathcal{B}_4,(4))} \right] = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}_{G,\mathcal{B}_4}$

Questions :

1. Déterminer le torseur cinématique $\left[C(2/\mathcal{R}_1)\right]_O$ du moyeu principal (2) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point *O*.
2. Déterminer le torseur cinématique $\left[C(4/\mathcal{R}_1)\right]_O$ du pot de résine (4) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point *O*.
3. Déterminer le torseur cinétique $\left[C_i(2/\mathcal{R}_1)\right]_O$ du moyeu principal (2) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point *O*.
4. Déterminer le torseur dynamique $\left[D(2/\mathcal{R}_1)\right]_O$ du moyeu principal (2) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point *O*.
5. Justifier sans la calculer la forme de la matrice d'inertie du pot de résine.
6. Déterminer le torseur cinétique $\left[C_i(4/\mathcal{R}_1)\right]_G$ du pot de résine (4) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point *G*.
7. Déterminer le torseur dynamique $\left[D(4/\mathcal{R}_1)\right]_G$ du pot de résine (4) dans son mouvement par rapport au bâti (1) réduit au point *G*.
8. Vérification : Déterminer la matrice d'inertie en *O* du pot de résine (4). Calculer ensuite le moment cinétique en *O* pot de résine (4) par rapport au bâti (1). Retrouver le moment cinétique en *G* du pot de résine (4) par rapport au bâti (1) calculé précédemment.
9. Si l'on prend en compte l'inertie des deux plateaux (3i) et (3s) que l'on considère comme des disques plans de masse *m* et de rayon *2R*. Déterminer alors la matrice d'inertie de l'ensemble tournant S={3i,3s,4}déterminée en *O* dans la base $\mathcal{B}_2$.

Figure 1

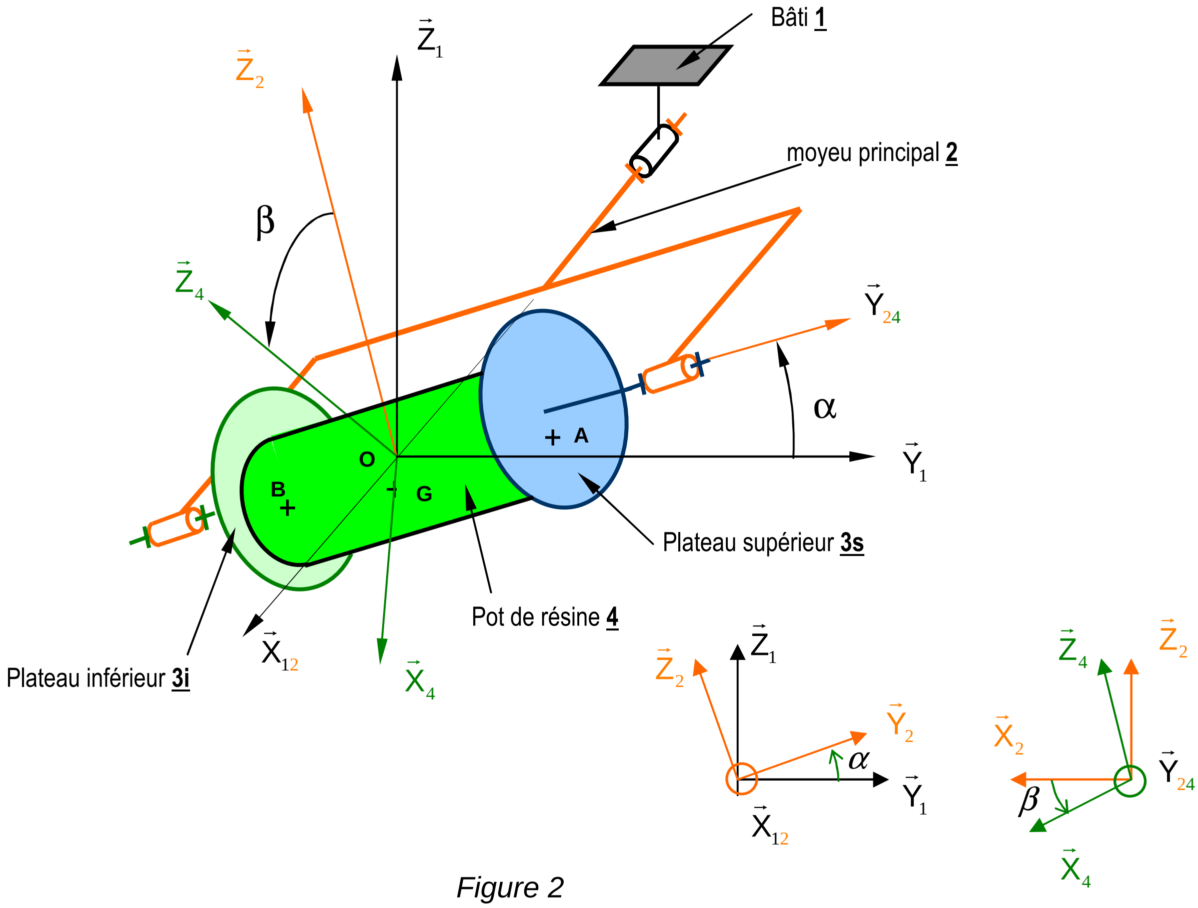


Figure 2

Formulaire Mécanique du Solide :

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$\left[\mathcal{C}_{S/\mathcal{R}}\right]=\left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad , \quad \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})}\right]_A \qquad \text{avec} \qquad \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})}=\vec{V}_{(B\in S/\mathcal{R})}+\vec{AB}\wedge\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d\,\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1}=\left(\frac{d\,\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2}+\vec{\Omega}_{2/1}\wedge\vec{u}$$

Moment dynamique au point A d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$:

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})}=\left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}}+m\,\vec{V}_{(A/\mathcal{R})}\wedge\vec{V}_{(G\in S/\mathcal{R})} \qquad \text{avec } A\in S$$

Moment cinétique au point A d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$:

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}=\left[I_{A,\mathcal{B}}\,(S)\right]\,\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}+m\;\vec{AG}\wedge\vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} \qquad \text{avec } A\in S$$

Matrice d'inertie en A d'un solide S : $$\left[I_{A,\mathcal{B}}\,(S)\right]=\begin{bmatrix}\int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ & \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm \\ & & \int_S (x^2+y^2)dm\end{bmatrix}$$

Théorème de Huygens : $$\left[I_{A,\mathcal{B}}\,(S)\right]=\left[I_{G,\mathcal{B}}\,(S)\right]+\left[I_{A,\mathcal{B}}\,(G,m(S))\right]$$