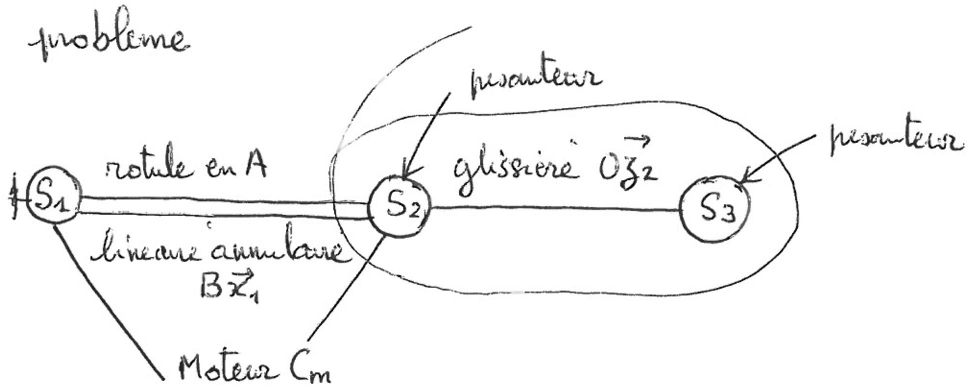
Corrigé "Mélangeur de produits"

Analyse du problème



↑ paramètre θ

$\theta(t)$ connu

↑ paramètre λ

Bilan : 10 inconnues statiques

$$\left\{\begin{matrix} X_{A12} & 0 \\ Y_{A12} & 0 \\ Z_{A12} & 0 \end{matrix}\right\}_{A\,b_1} \quad \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{B12} & 0 \\ Z_{B12} & 0 \end{matrix}\right\}_{B\,b_1}$$

$$\left\{\begin{matrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ -F_r & N_{23} \end{matrix}\right\}_{O\,b_2}$$

F_r résistance liée au contact S_2/S_3

2 inconnues cinématiques λ, θ

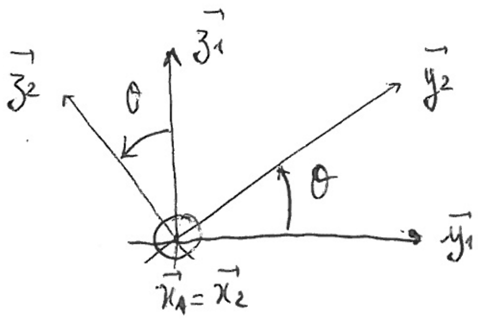
1 couple moteur C_m

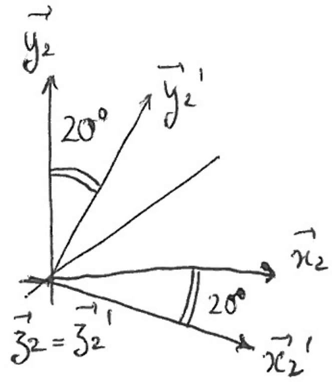
⇒ 13 inconnues

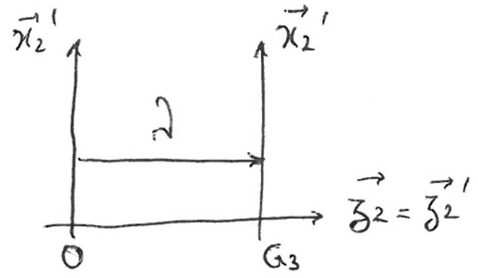
12 équations du PFD (2 solides dans l'espace)

1 loi horaire ($\theta(t)$ connu)

⇒ 13 équations







Pour chercher les actions aux paliers, on isole $(E) \equiv (S_2) \cup (S_3)$

BAM ext

- rotule en A $\begin{Bmatrix} X_{A12} & 0 \\ Y_{A12} & 0 \\ Z_{A12} & 0 \end{Bmatrix}_{A b_2}$
- linéaire annulaire $B \vec{x}_1$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{B12} & 0 \\ Z_{B12} & 0 \end{Bmatrix}_{B b_2}$
- couple moteur $C_m \vec{x}_1$
- pesanteur $\rightarrow S_2$ $\quad -M_2 g \vec{z}_1$ en $G_2 \equiv O$
- pesanteur $\rightarrow S_3$ $\quad -M_3 g \vec{z}_1$ en G_3

PFD
$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{ext \to (E)}} = \overrightarrow{Rd}(E/R_g) \\ \sum \overrightarrow{M_{O\, ext \to (E)}} = \vec{\delta}_O(E/R_g) \end{cases}$$

R_g est confondu avec R_1

Calcul des grandeurs dynamiques

✓ $\overrightarrow{Rd}(E/R_g) = \overrightarrow{Rd}(S_2/R_g) + \overrightarrow{Rd}(S_3/R_g)$

$\overrightarrow{Rd}(S_2/R_g)$: $M_2 \vec{\gamma}_{G_2, S_2/R_g} = \vec{0}$

(centre d'inertie sur l'axe de rotation)

$\overrightarrow{Rd}(S_3/R_g)$: $M_3 \vec{\gamma}_{G_3, S_3/R_g}$

$$\vec{V}_{G_3, S_3/R_g} = \left.\frac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt}\right|_1 = \dot{\lambda} \vec{z}_2 + \lambda \left.\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right|_1$$
$$= \dot{\lambda} \vec{z}_2 + \lambda \dot{\theta} \vec{y}_2$$

$$\vec{\gamma}_{G_3, S_3/R_g} = \left.\frac{d\vec{V}_{G_3, S_3/R_g}}{dt}\right|_1$$
$$= \underbrace{\ddot{\lambda} \vec{z}_2}_{\text{Translation}} \underbrace{- \lambda \ddot{\theta} \vec{y}_2 - \lambda \dot{\theta}^2 \vec{z}_2}_{\text{Rotation}} \underbrace{- 2 \dot{\lambda} \dot{\theta} \vec{y}_2}_{\text{Coriolis}}$$

$$\overrightarrow{Rd}(E/R_g) = M_3 \ddot{\lambda} \vec{z}_2 - M_3 \lambda \ddot{\theta} \vec{y}_2 - M_3 \lambda \dot{\theta}^2 \vec{z}_2 - 2 M_3 \dot{\lambda} \dot{\theta} \vec{y}_2$$

✓ $\vec{\delta}_O(E/R_g) = \vec{\delta}_O(S_2/R_g) + \vec{\delta}_O(S_3/R_g)$

O fixe

$$\vec{\sigma}_{O,S_2/R_g} = [I_{O,S_2}] . \vec{\Omega}(S_2/R_g)$$

$$= \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{02} = \begin{pmatrix} A_2\dot\theta \\ -F_2\dot\theta \\ -E_2\dot\theta \end{pmatrix}_2$$

$$\vec{\delta}_{O,S_2/R_g} = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{O,S_2/R_g}}{dt}\right|_1 = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{O,S_2/R_g}}{dt}\right|_2 + \left\{\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{\sigma}_{O,S_2/R_g}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} A_2\ddot\theta \\ -F_2\ddot\theta + E_2\dot\theta^2 \\ -E_2\ddot\theta - F_2\dot\theta^2 \end{pmatrix}_2$$

matrice donnée en G_3

Parallélépipède

$$[I_{G_3,S_3}] = \begin{pmatrix} M_3\left(\frac{l_3^2+H_3^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & M_3\left(\frac{L_3^2+H_3^2}{12}\right) & \\ 0 & 0 & M_3\frac{(l_3^2+L_3^2)}{12} \end{pmatrix}_{B_2'}$$

on garde A_3 B_3 C_3 pour les calculs.

$$\vec{\sigma}_{G_3,S_3/R_g} = [I_{G_3,S_3}] . \vec{\Omega}(S_3/R_g)$$

$$= \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\theta\cos\alpha \\ \dot\theta\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3\dot\theta\cos\alpha \\ B_3\dot\theta\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{2'}$$

$$\vec{\delta}_{G_3,S_3/R_g} = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{G_3,S_3/R_g}}{dt}\right|_1 = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{G_3,S_3/R_g}}{dt}\right|_{2'} + \left(\vec{\Omega}_{2'/1} \wedge \vec{\sigma}_{G_3,S_3/R_g}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} A_3\ddot\theta\cos\alpha \\ B_3\ddot\theta\sin\alpha \\ (B_3-A_3)\dot\theta^2\cos\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}_{2'}$$

$$\vec{\delta}_{O,S_3/R_g} = \vec{\delta}_{G_3,S_3/R_g} + \underbrace{\left(\vec{OG_3} \wedge \vec{R_d}(S_3/R_g)\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -M_3(\lambda\ddot\theta + 2\dot\lambda\dot\theta) \\ M_3(\ddot\lambda - \lambda\dot\theta^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_3\lambda(\lambda\ddot\theta + 2\dot\lambda\dot\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

Resolution

Eléments de réduction des actions mécaniques en O

- couple moteur $C_m \vec{x}_1$

- pesanteur → S_2

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_2 g & 0 \end{Bmatrix}_{G_2\, b_1} \equiv \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -M_2 g \sin\theta & 0 \\ -M_2 g \cos\theta & 0 \end{Bmatrix}_{G_2\, b_2}$$

- pesanteur → S_3

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_3 g & 0 \end{Bmatrix}_{G_3\, b_1} \equiv \begin{Bmatrix} 0 & M_3 g \lambda \sin\theta \\ -M_3 g \sin\theta & 0 \\ -M_3 g \cos\theta & 0 \end{Bmatrix}_{O\, b_2}$$

$$\lambda \vec{z}_2 \wedge -M_3 g \vec{z}_1 = M_3 g \lambda \sin\theta \, \vec{x}_2$$

- rotule en A

$$\begin{Bmatrix} X_{A12} & 0 \\ Y_{A12} & 0 \\ Z_{A12} & 0 \end{Bmatrix}_{A, b_2} \equiv \begin{Bmatrix} X_{A12} & 0 \\ Y_{A12} & L Z_{A12} \\ Z_{A12} & -L Y_{A12} \end{Bmatrix}_{O, b_2}$$

- linéaire annulaire en B

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{B12} & 0 \\ Z_{B12} & 0 \end{Bmatrix}_{B, b_2} \equiv \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{B12} & -L Z_{B12} \\ Z_{B12} & L Y_{B12} \end{Bmatrix}_{O\, b_2}$$

$$\sum \vec{F}_{ext \to E} = \vec{R_d}(E/R_g) \Rightarrow \begin{cases} X_{A12} = 0 \\ Y_{A12} + Y_{B12} - (M_2 + M_3) g \sin\theta = -M_3(\lambda \ddot{\theta} + 2 \dot{\lambda} \dot{\theta}) \\ Z_{A12} + Z_{B12} - (M_2 + M_3) g \cos\theta = M_3(\ddot{\lambda} - \lambda \dot{\theta}^2) \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_{O\, ext \to E} = \vec{\delta}_O(E/R_g) \Rightarrow \begin{cases} C_m + M_3 g \lambda \sin\theta = M_3 \lambda (\lambda \ddot{\theta} + 2 \dot{\lambda} \dot{\theta}) + (A_3 \cos^2\alpha + B_3 \sin^2\alpha) \ddot{\theta} + A_2 \ddot{\theta} \\ L(Z_{A12} - Z_{B12}) = -F_2 \ddot{\theta} + E_2 \dot{\theta}^2 + (B_3 - A_3) \ddot{\theta} \sin\alpha \cos\alpha \\ -L(Y_{A12} - Y_{B12}) = -E_2 \ddot{\theta} - F_2 \dot{\theta}^2 + (B_3 - A_3) \dot{\theta}^2 \sin\alpha \cos\alpha \end{cases}$$

D'où les expressions données.

L'équation de mouvement en ∂ est donnée à partir du graphe des liaison. Elle est obtenue en isolant S_3 et en écrivant le théorème de la résultante dynamique sur l'axe $\vec{z}_2$

$$\sum \overrightarrow{F_{ext \to S_3}} \cdot \vec{z}_2 = \overrightarrow{R_d}(S_3/R_g) \cdot \vec{z}_2$$

Application numérique :

$$X_{A_{12}} = 0$$

$$Y_{A_{12}} = \frac{1}{2}(M_2 + M_3) g \sin\theta + \frac{1}{2L}\left\{ E_2 \dot{\theta}^2 - \left\{ (A_3 - B_3)\cos\alpha \sin\alpha + F_2 \right\} \ddot{\theta} \right\}$$

$$Z_{A_{12}} = \frac{1}{2}(M_2 + M_3) g \cos\theta + \frac{1}{2L}\left\{ - E_2 \ddot{\theta} - \left\{ (A_3 - B_3)\sin\alpha \cos\alpha + F_2 \right\} \dot{\theta}^2 \right\}$$

$$Y_{B_{12}} = \frac{1}{2}(M_2 + M_3) g \sin\theta - \frac{1}{2L}\left\{ E_2 \dot{\theta}^2 - \left\{ (A_3 - B_3)\cos\alpha \sin\alpha + F_2 \right\} \ddot{\theta} \right\}$$

$$Z_{B_{12}} = \frac{1}{2}(M_2 + M_3) g \cos\theta - \frac{1}{2L}\left\{ - E_2 \ddot{\theta} - \left\{ (A_3 - B_3)\cos\alpha \sin\alpha + F_2 \right\} \dot{\theta}^2 \right\}$$