

Partiel de Mécanique du Solide 2

Durée 1h15' aucun document autorisé

novembre 2010

Lors de la correction, une attention particulière sera portée à la critique et aux remarques émises par l'étudiant sur l'homogénéité et la vraisemblance de ses résultats.

Mélangeur de produits pulvérulents

En dentisterie, on utilise fréquemment des ciments de scellement ou des pâtes pour prise d'empreinte (alginate) élaborés à partir du mélange de constituants pulvérulents (plâtres, silice) et d'additifs (magnésie, phosphate). La qualité des soins prodigués par le dentiste est directement liée à l'homogénéité des mélanges réalisés.

Le mélangeur étudié, représenté Figure 1, a pour fonction de mélanger de la poudre qui est située dans une cuve de forme parallélépipédique. L'action de mélange est opérée en animant la cuve d'un mouvement de rotation à grande vitesse selon un axe de rotation horizontal qui n'est à pas un axe principal d'inertie. La cuve est en liaison pivot horizontale par rapport au bâti de la machine. Par souci de simplicité, la poudre qui ne remplit pas complètement la cuve, est ici assimilée à un solide rigide mobile en translation dans la cuve.

Le but de la présente étude est de réaliser les premières étapes de modélisation qui permettraient de dimensionner les paliers des liaisons pivot du cadre et le moteur d'entraînement.

Présentation générale du mélangeur de produits pulvérulents :

Objectif de l'étude : Nous nous intéressons à la chaîne de transmission de puissance et plus particulièrement au dimensionnement des paliers avant et arrière de la cuve assurant la liaison Pivot.

Le système en rotation par rapport au bâti fixe S_1 , entraîné par le moteur est composé (Figure 1):

- o d'un ensemble S_2 constitué de la cuve vide en liaison pivot parfaite par rapport au bâti d'axe (O, \vec{x}_2) , de paramètre angulaire $\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. Cet axe de rotation (O, \vec{x}_2) (passant par l'axe des deux paliers) ne correspond pas à l'axe de symétrie de la cuve (O, \vec{x}'_2) . Il est décalé d'un angle α constant tel que $\alpha = (\vec{x}'_2, \vec{x}_2) = (\vec{y}'_2, \vec{y}_2) = 20^\circ$. Les repères $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $\mathcal{R}'_2 = (O, \vec{x}'_2, \vec{y}'_2, \vec{z}'_2)$ sont liés à la pièce (2).
- o la poudre modélisée par un solide rigide parallélépipédique de centre d'inertie G_3 en liaison glissière par rapport à la cuve suivant l'axe (O, \vec{z}_2) , de paramètre de position λ tel que $OG_3 = \lambda(t) \vec{z}_2$.

Sur la Figure 1 sont représentés les principaux repères de calcul et le modèle de comportement de la poudre dans la cuve est donné Figure 2

Le repère $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au bâti est fixe et la pesanteur sera notée $\vec{g} = -g \vec{z}_1$ avec $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$.

La détermination des roulements de la liaison pivot liant le solide S_2 et le bâti S_1 passe par le calcul du torseur dynamique de l'ensemble mobile (S_2+S_3). On se propose de déterminer le torseur des actions mécaniques transmissible que l'on modélise par le torseur réduit au point O sous la forme :

$$\left[F_{S_1 \rightarrow S_2} \right] = \left[X_{12} \vec{x}_2 + Y_{12} \vec{y}_2 + Z_{12} \vec{z}_2, M_{12} \vec{y}_2 + N_{12} \vec{z}_2 \right]_O$$

Les caractéristiques des différents éléments sont reprises dans le tableau ci-dessous.

Solide	Repères	Paramètres cinétiques
S ₁	bâti R ₁ = (O, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) supposé galiléen	Situation géométrique du point O
S ₂	Cadre + cuve vide R ₂ = (G ₂ , $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$) R' ₂ = (G ₂ , $\vec{x}'_2, \vec{y}'_2, \vec{z}'_2$)	Centre d'inertie G ₂ =O, masse M ₂ =1375 kg Matrice d'inertie, au point O, dans la base B ₂ $[I(O, S_2)] = \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}$ Supposée connue
S ₃	Poudre (en situation à l'intérieur de la cuve) R ₃ = (G ₃ , $\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3$)	Centre d'inertie G ₃ , masse M ₃ =1900 kg Hauteur H ₃ =1560 mm, largeur L ₃ =1185 mm, profondeur l ₃ =1035 mm Matrice d'inertie, au point G ₃ , dans la base B' ₂ $[I(G_3, S_3)] = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{B'_2}$ écrite sous forme générale

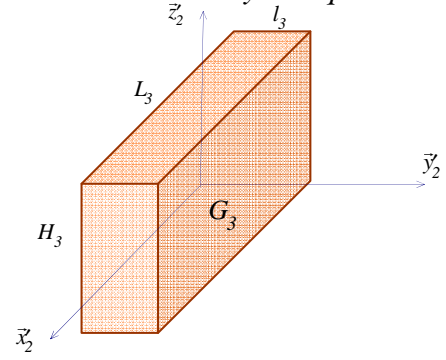
Questions – Les parties sont indépendantes

Question 1 (2pts) : Justifier la forme de ce torseur d'actions transmissibles $[F_{S_1 \rightarrow S_2}]$. Comment peut-on modéliser l'action du moteur d'entraînement du système S₂.

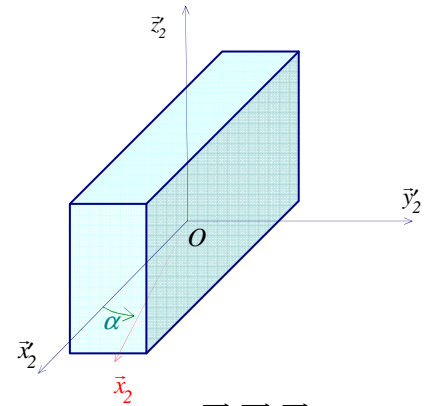
Question 2 (4pts) : On se propose dans cette question de déterminer le torseur dynamique du solide S₂ dans son mouvement par rapport au bâti S₁ réduit au point O.

- Déterminer le torseur cinétique du solide S₂ en mouvement par rapport au bâti S₁ réduit au point O. L'exprimer en projection sur la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.
- Déterminer ensuite le torseur dynamique du solide S₂ en mouvement par rapport au bâti S₁ réduit au point O.

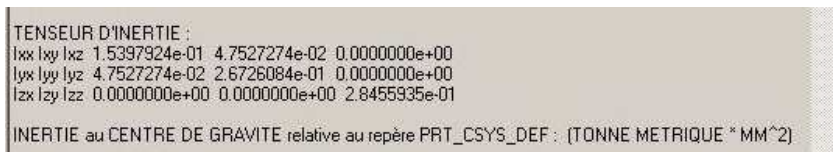
Question 3 (12pts) : On se propose dans cette question de déterminer le torseur dynamique du solide S₃ dans son mouvement par rapport au bâti S₁ réduit au point O.

- Sachant que le solide 3 est constitué par un parallélépipède de coté L₃, l₃ et H₃, déterminer précisément tous les éléments de la matrice d'inertie $[I_{G_3(S_3)}]$ exprimée dans la base de votre choix. On simplifiera la matrice en utilisant les symétries et on utilisera le même type de calcul pour déterminer les moments d'inertie autour des trois axes
- 
- Déterminer le torseur cinématique dans le mouvement du solide S₃ en mouvement par rapport au bâti S₁ réduit au point G₃.
 - Déterminer alors le torseur cinétique du solide S₃ en mouvement par rapport au bâti S₁ réduit au point G₃. L'exprimer en projection sur la base $\mathcal{B}'_2 = (\vec{x}'_2, \vec{y}'_2, \vec{z}'_2)$.
 - Déterminer ensuite le torseur dynamique du solide S₃ en mouvement par rapport au bâti S₁ réduit au point O. L'exprimer enfin en projection sur la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.

Question 4 (2pts) : On se propose dans cette question de vérifier des données fournies par un logiciel de C.A.O Pro/ENGINEER®. La fenêtre ci-dessous représente les valeurs inertielles de la cuve modélisée par un parallélépipède dans le repère central d'inertie $\mathcal{R}'_2 = (O, \vec{x}'_2, \vec{y}'_2, \vec{z}'_2)$,



a- Vérifier que les valeurs inertielles ci-dessous sont données dans le repère $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\alpha = (\vec{x}'_2, \vec{x}_2) = (\vec{y}'_2, \vec{y}_2) = 20^\circ$. On pourra vérifier par exemple la valeur du moment d'inertie $I_{/O\vec{x}_2}$



Formulaire Mécanique du Solide :

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$[C_{S/\mathcal{R}}] = \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \\ \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}_A \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S/\mathcal{R})} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Moment dynamique au point A d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère \mathcal{R} :

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} \right)_{\mathcal{R}} + m \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})} \quad \text{avec} \quad A \in S$$

Moment cinétique au point A d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère \mathcal{R} :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = [I_{A,B(S)}] \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m \vec{AG} \wedge \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \quad \text{avec} \quad A \in S$$

Matrice d'inertie en A d'un solide S :

$$[I_{A,B(S)}] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S (z^2 + x^2) dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

Théorème de Huygens :

$$[I_{A,B(S)}] = [I_{G,B(S)}] + [I_{A,B(G,m(S))}]$$

Inertie/droite passant par le point A

$$I_{\Delta}(s) = \vec{u} \cdot ([I_{A,B}(s)] \cdot \vec{u})$$

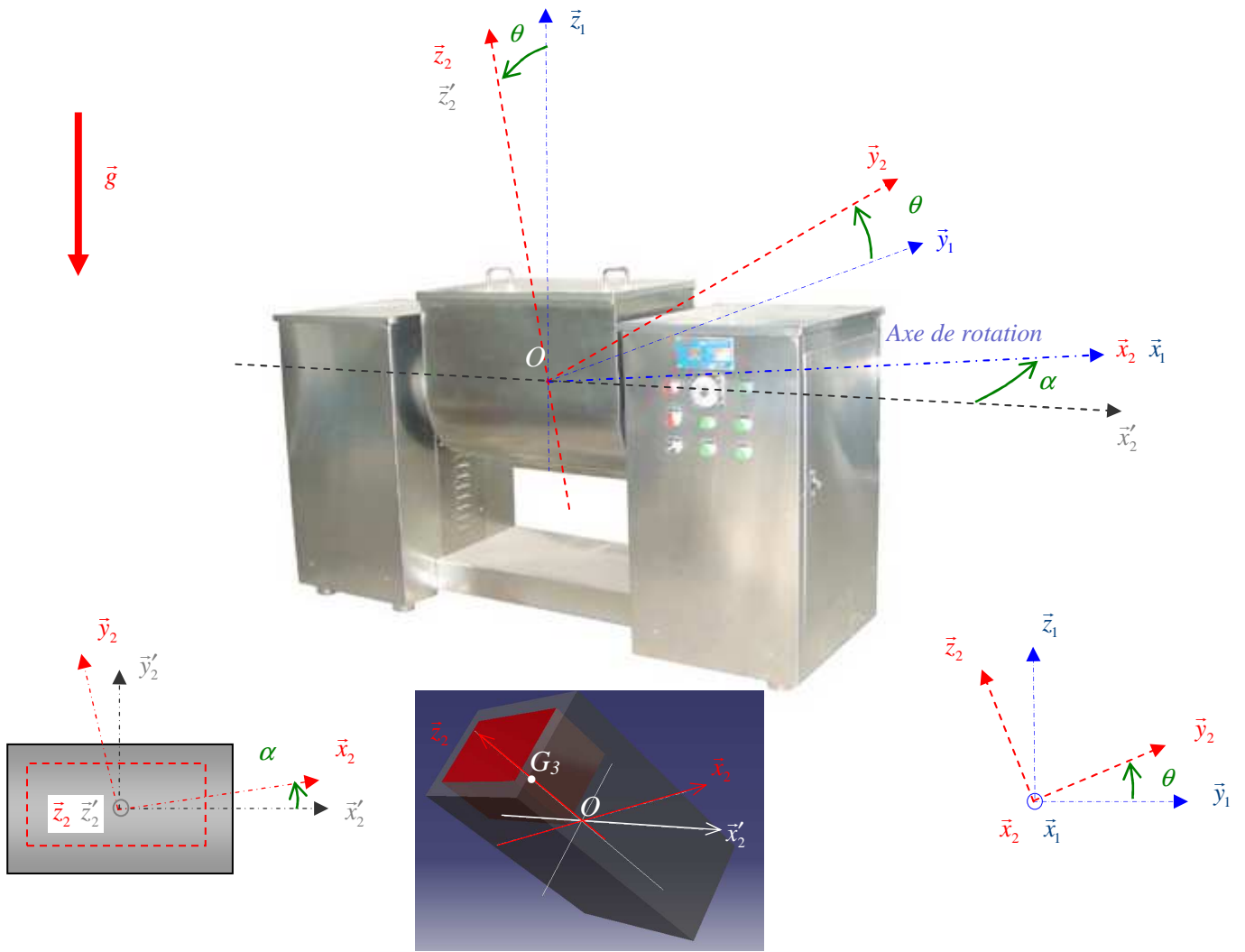


Figure 1 : Paramétrage et modèle du mélangeur

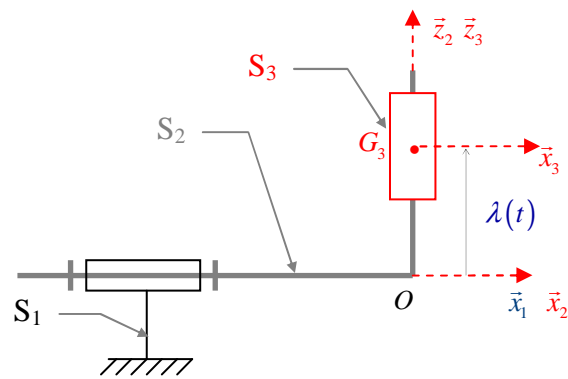


Figure 2 : Modélisation du comportement de la poudre dans le bac

Question Bonus 2: On se propose dans cette question de déterminer le torseur des efforts extérieurs qui s'exercent sur l'ensemble $E=\{S_2, S_3\}$.

- a- Isoler l'ensemble $E=\{S_2, S_3\}$. Faire le bilan des actions extérieures s'exerçant sur cet ensemble.
- b- Déterminer alors le torseur des actions extérieures s'exerçant sur l'ensemble $E=\{S_2, S_3\}$. réduit au point O .

Question Bonus 3: Interpréter d'un point de vue mécanique l'origine des différents termes qui composent les expressions de Y_{12} , Z_{12} , M_{12} et N_{12} .

$$X_{12} = 0$$

$$Y_{12} = (M_2 + M_3) g s \theta - M_3 (2 \dot{\lambda} \dot{\theta} + \lambda \ddot{\theta})$$

$$Z_{12} = (M_2 + M_3) g c \theta + M_3 (\ddot{\lambda} - \lambda \dot{\theta}^2)$$

$$M_{12} = +E_2 \dot{\theta}^2 - [(A_3 - B_3) c \alpha s \alpha + F_2] \ddot{\theta}$$

$$N_{12} = -E_2 \ddot{\theta} - [(A_3 - B_3) s \alpha c \alpha + F_2] \dot{\theta}^2$$