

Virage à plat d'un avion à hélice

Introduction :

On se propose d'aborder quelques aspects de la dynamique d'un avion à hélice(s) (Figure 1). On se focalise sur une seule hélice, mais ce qui suit pourrait très bien s'appliquer à un avion muni de plusieurs hélices.

Questionnement – Les 3 parties sont indépendantes

Question 1: Calcul de la matrice d'inertie d'une pale.

On détermine dans cette partie la matrice d'inertie d'une pale modélisée simplement par une plaque homogène de masse m , sans épaisseur de largeur a et de longueur b dont l'axe de rotation est l'axe $O\vec{Z}$.

- a- Déterminer tous les éléments de la matrice d'inertie exprimée en $G \left[I_{(pale:X,Y,Z)} \right]_G$ de la pale exprimée dans la base X, Y, Z en fonction des données géométriques (figure 2)
- b- Déterminer alors la matrice d'inertie exprimée en $O \left[I_{(pale:X,Y,Z)} \right]_O$ de la pale exprimée dans la base X, Y, Z en fonction des données géométriques (figure 2). Montrer que cette matrice peut se mettre sous la forme :
$$\left[I_{(pale:X,Y,Z)} \right]_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_O$$
- c- Soit $(O\vec{x}, O\vec{X}) = \alpha$, en déduire alors les moments d'inertie par rapport à l'axe $O\vec{x}$: $I_{/O\vec{x}}$ et par rapport à l'axe $O\vec{y}$: $I_{/O\vec{y}}$ en fonction des moments d'inertie A, B, C et de l'angle α (figure 3).

Question 2: Calcul de la matrice d'inertie d'une hélice bipale et d'une hélice tripale

A partir du calcul de la matrice d'inertie d'une pale effectué à la question 1, on détermine dans cette partie la matrice d'inertie d'une hélice bipale et tripale. On rappelle que le moment d'inertie de deux solides par rapport à un axe est la somme des deux moments d'inertie de chacun des solides par rapport à cet axe.

- a- Dans le cas d'une hélice bipale (figure 4) constituée de 2 pales identiques, précisez des hypothèses de symétrie raisonnables concernant ce solide qui permettent de déterminer simplement la forme de la matrice d'inertie en $O \left[I_{(Bipale:x,y,z)} \right]_O$. Déterminer alors cette matrice d'inertie $\left[I_{(Bipale:x,y,z)} \right]_O$ en fonction des moments d'inertie A, B et C (figure 4)
- b- Dans le cas d'une hélice tripale (figure 5) constituée de 3 pales identiques à 120° , précisez des hypothèses de symétrie raisonnables concernant ce nouveau solide qui permettent de déterminer simplement la forme de la matrice d'inertie en O

$\left[I_{(Tripale;x,y,z)} \right]_O$ Déterminer alors cette matrice d'inertie $\left[I_{(Tripale;x,y,z)} \right]_O$ en fonction des moments d'inertie A, B et C (figure 4)

c- Conclure quant aux formes des deux matrices d'inertie des hélices bipale et tripale.

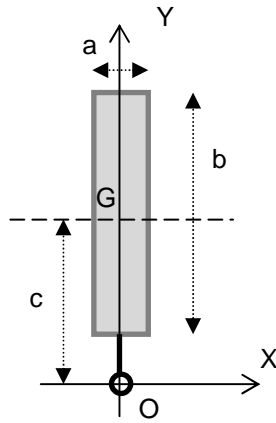


Figure 2

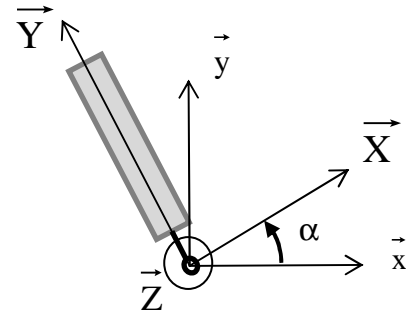


Figure 3

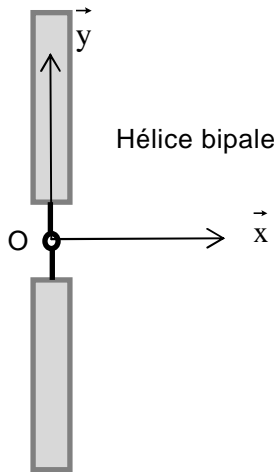


Figure 4

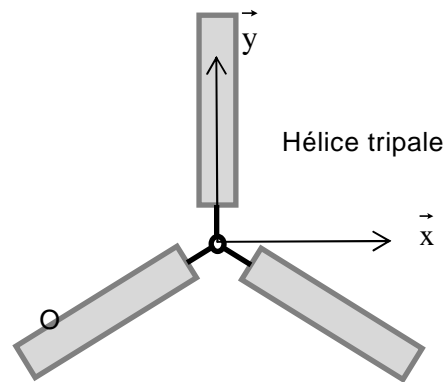


Figure 5

Question 3:

Dans cette partie on considère l'avion en régime moteur constant, en vol horizontal, d'abord rectiligne, puis amorçant un virage. On souhaite étudier l'influence de la rotation de l'hélice sur le comportement de l'avion en virage et de ce fait il est nécessaire de connaître le torseur dynamique de système tournant hélice et arbre porte-hélice.

On note S le système formé par l'hélice et l'arbre porte-hélice, ce dernier arbre étant lié à l'aide de deux paliers P_1 et P_2 au corps de l'avion. Sur la Figure 6, on représente en (a) une vue de profil de S, et deux vues de face présentant deux types d'hélice possibles, bipale (b)

ou tripale (c). Soit $\left[I_{(S;x,y,z)} \right]_G = \begin{pmatrix} I_{/GX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{/GY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{/GZ} \end{pmatrix}_G$ la matrice d'inertie du système {hélice et

l'arbre porte-hélice} réduit en G dans la base liée au système tournant.

On désigne par $\mathcal{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le référentiel (galiléen) lié au sol (Figure 7). Dans ce référentiel une base fixe est choisie de sorte que la direction initiale de vol soit le vecteur $-\vec{y}_0$, et le vecteur \vec{z}_0 pointe vers le haut.

On repère l'orientation de S dans cette base par ses angles d'Euler ψ , θ et φ . Notez aussi que la direction de vol de l'avion est toujours donnée par le vecteur Z

Dans tout ce qui suit, $\theta = \pi/2$ (cas d'un vol horizontal), $\psi = \psi(t)$ ($\psi = 0$ au début condition de vol rectiligne), $\varphi = \omega t$ avec $\omega = \text{constante} > 0$ (condition de régime moteur constant).

La figure 7 d représente la configuration de S dans le cas d'un vol horizontal, au début d'un virage à gauche, lorsque ψ augmente en partant de la valeur 0 ; on a aussi représenté tous les angles d'Euler et quelques vecteurs des bases entrant en jeu. On désigne par $\mathcal{R}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le référentiel lié à S.

- Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{S/0}$ de l'ensemble S dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_{G,S/0}$ de l'ensemble S dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ réduit au point G.
- En déduire le moment dynamique $\vec{\delta}_{G,S/0}$ de l'ensemble S dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ réduit au point G.
- Montrer que, dans le cas où $I_{GX} = I_{GY}$ le moment dynamique en G s'écrit : $\vec{\delta}_{(G,S/0)} = I_{GZ} \cdot \omega \psi \vec{x}_2$

Formulaire :

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$[C_{S/\mathcal{R}}] = [\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}] \quad , \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \Big|_A \text{ avec } \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S/\mathcal{R})} + A\vec{B} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{\delta}_A^{(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A^{(S/\mathcal{R})} \right)_{\mathcal{R}} + m \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})}$$

où :

$$\vec{\sigma}_A^{(S/\mathcal{R})} = [I_{A,B}^{(S)}] \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m A\vec{G} \wedge \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \quad \text{avec } A \in S$$

$$\text{Et } [I_{A,B}^{(S)}] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm & \\ & \int_S (x^2+y^2)dm & \end{bmatrix} \quad \text{Théorème de Huygens } [I_{A,B}^{(S)}] = [I_{G,B}^{(S)}] + [I_{A,B}^{(G,m(S))}]$$

$$\text{Moment d'inertie/Axe passant par A : } I_{\Delta}(s) = \vec{i} \cdot ([I_{A,B}^{(s)}]) \cdot \vec{i}$$



Figure 1 : Vue générale d'un avion à hélice

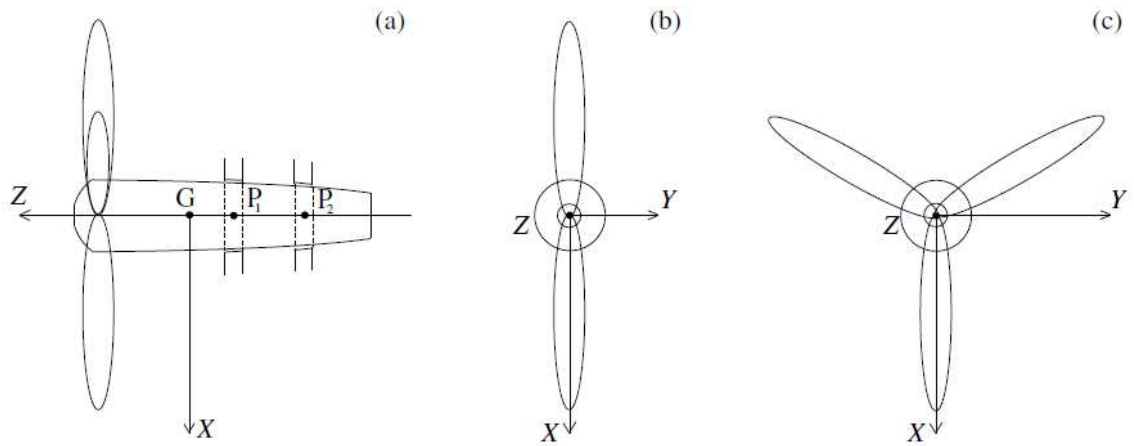


Figure 6 : Vue de profil de S (a) et vues de face présentant deux types d'hélice possibles, bipale (b) ou tripale (c)

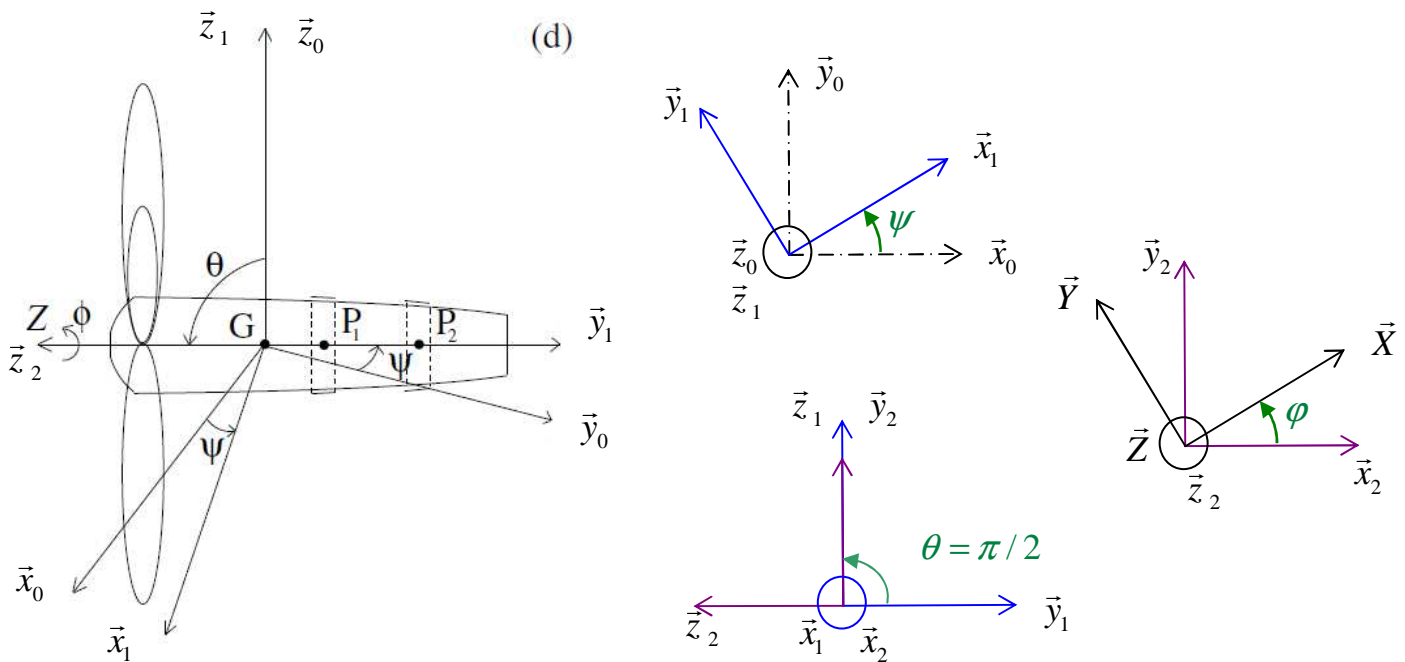


Figure 7 : Paramétrage du système (S) formé par l'hélice et l'arbre porte-hélice