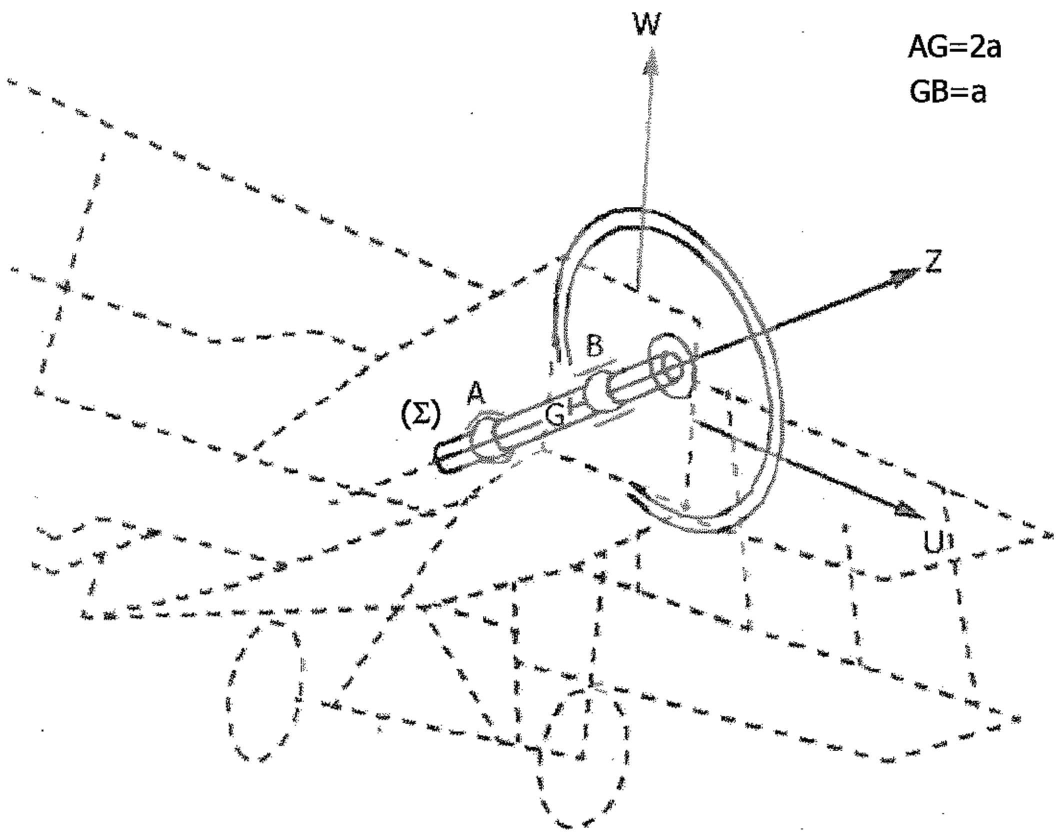
# Virage à plat d'un avion à hélice.

On se propose d'étudier le mouvement autour de son centre de gravité du système ($\Sigma$) constitué par l'arbre porte-hélice et les pales de l'hélice.

L'avion étant en vol rectiligne horizontal, le pilote amorce un virage à plat.

L'objectif est de montrer l'avantage d'un hélice tripale par rapport à une hélice bipale et de mettre en évidence le couple gyroscopique.




Données:

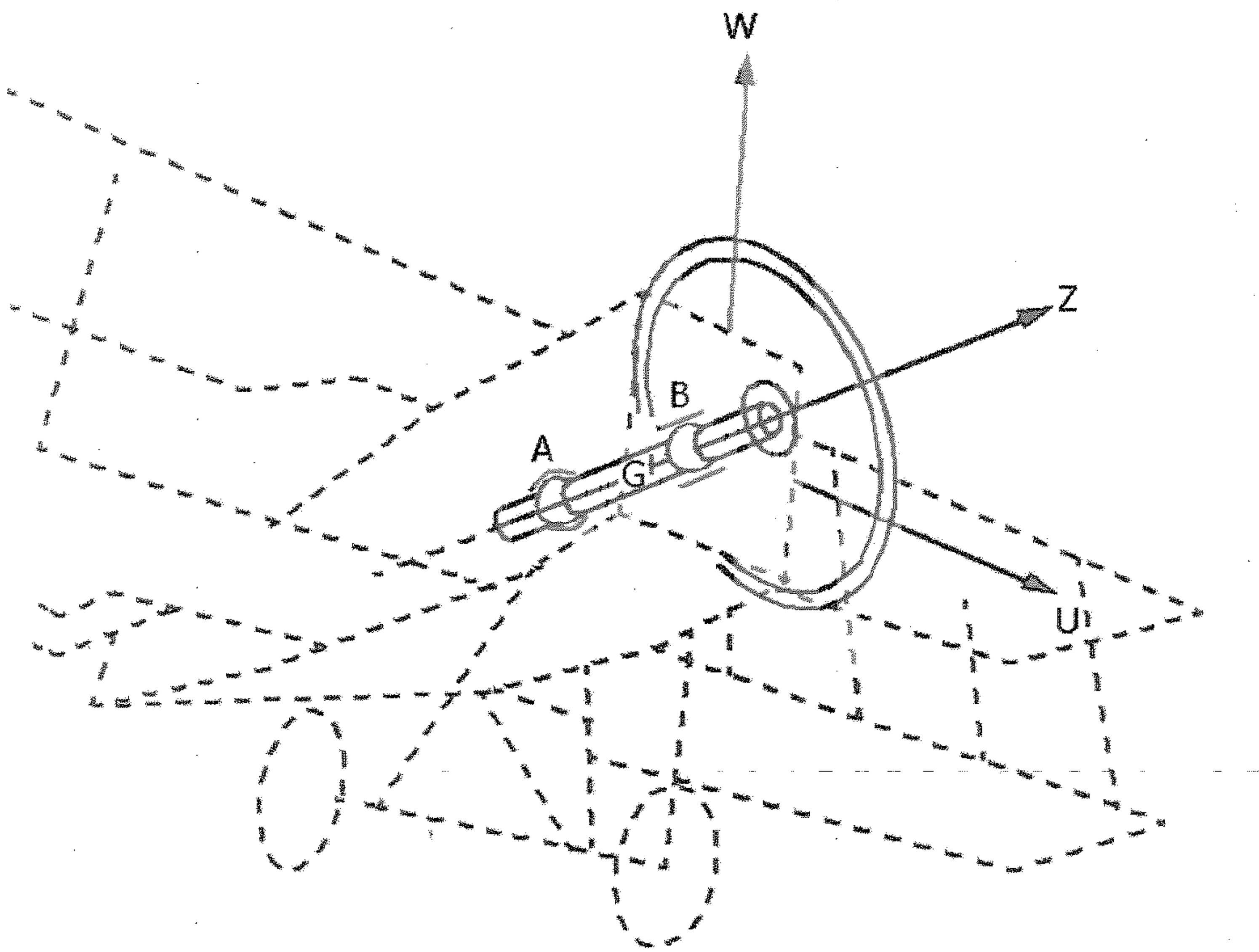
- vitesse de rotation de l'arbre / structure de l'avion: $\omega$ constante
- vitesse angulaire de manoeuvre: $\Omega$ constante
- matrice d'inertie en G de ($\Sigma$) dans la base liée à ($\Sigma$): $\begin{bmatrix} J_X & 0 & 0 \\ 0 & J_Y & 0 \\ 0 & 0 & J_Z \end{bmatrix}$

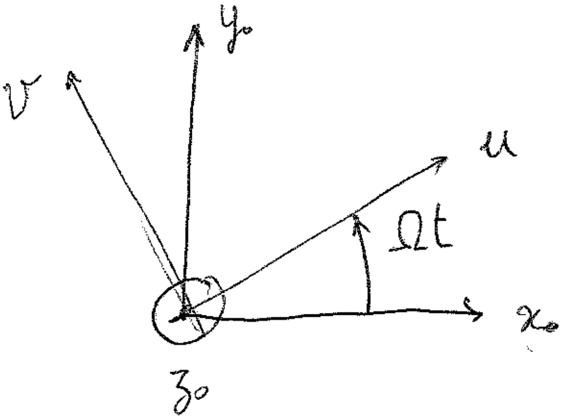
☐ 1 Paramétrer le système (rappel sur les angles d'Euler).

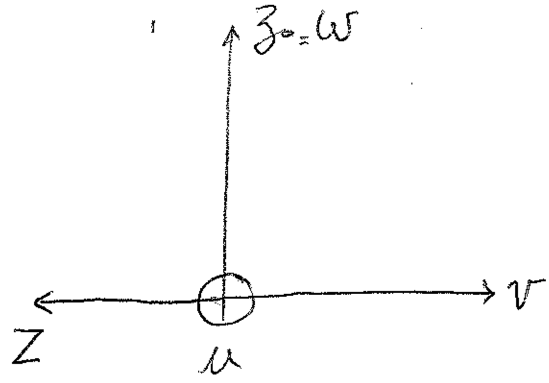
☐ 2 Quelle modélisation pour les paliers? Décrire les efforts extérieurs.

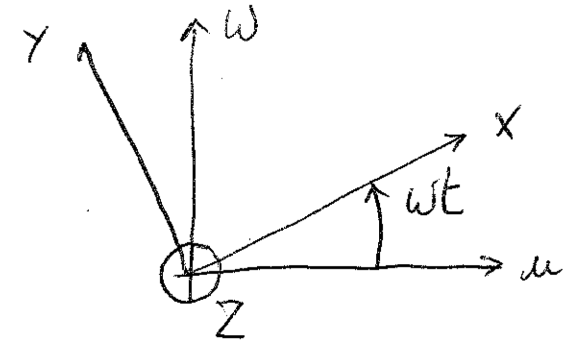
☐ 3 Exprimer le moment dynamique du rotor en G dans son mouvement par rapport au sol, dans la base 'avion'.

☐ 4 Quel est l'avantage d'un hélice tripale? Conséquences du couple gyroscopique?


W
Z
B
A
G
U
T




$$I_{G,\Sigma} = \begin{pmatrix} J_X & 0 & 0 \\ 0 & J_Y & 0 \\ 0 & 0 & J_Z \end{pmatrix}$$

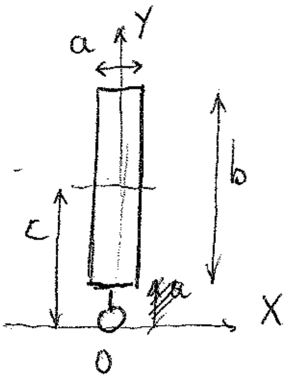
$$\vec{\Omega}(\Sigma/R) = \Omega\, \vec{z}_0 + \omega Z = \left| \begin{matrix} \Omega \sin \omega t \\ \Omega \cos \omega t \\ \omega \end{matrix} \right.$$

$$\vec{\sigma}^{G}_{\Sigma/R} = \left[I_{G,\Sigma}\right]\left\{\vec{\Omega}(\Sigma/R)\right\} = \begin{pmatrix} J_X \Omega \sin \omega t \\ J_Y \Omega \cos \omega t \\ J_Z \omega \end{pmatrix}$$

$$\vec{\delta}^{G}_{\Sigma/R} = \left.\frac{d\vec{\sigma}^{G}_{\Sigma/R}}{dt}\right)_{/R} = \left| \begin{matrix} J_X \Omega \omega \cos \omega t \\ -J_Y \Omega \cancel{\omega} \sin \omega t \\ 0 \end{matrix} \right) + \begin{pmatrix} \Omega \sin \omega t \\ \Omega \cos \omega t \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} J_X \Omega \sin \omega t \\ J_Y \Omega \cos \omega t \\ J_Z \omega \end{pmatrix}$$

$$= \left| \begin{matrix} (J_X - J_Y)\Omega \omega \cos \omega t + J_Z \omega \Omega \cos \omega t \\ (J_X - J_Y)\Omega \omega \sin \omega t + J_Z \omega \Omega \sin \omega t \\ -(J_X - J_Y)\Omega^2 \sin \omega t \cos \omega t \end{matrix} \right. \quad \text{dans } R_{XYZ}$$

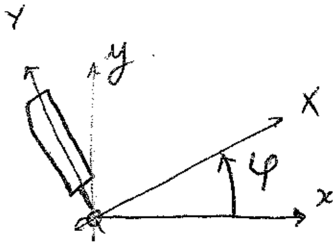
si $J_X = J_Y$ $\qquad \vec{\delta}^{G}_{\Sigma/R} = J_Z \omega \Omega\, \vec{u}$




$$I_{O,\text{pale}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{Mb^2}{12} + Mc^2 \qquad C = A + B$$

$$B = \frac{Ma^2}{12}$$

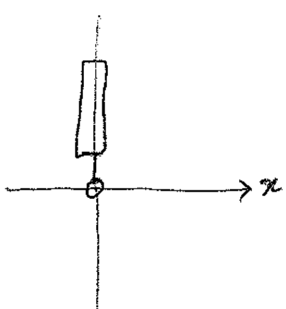



$$[P]_{XYZ \to xyz} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x & \quad y & \quad z \end{array} \end{array}$$

$$[I_{O,\text{pale},\,xyz}] = [P]^{-1}[I_{O,\text{pale},\,XYZ}][P]$$

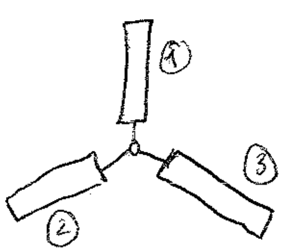
$$= \begin{pmatrix} A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi & (A-B)\cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ (A-B)\cos\varphi\sin\varphi & A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

bipale




$$\begin{pmatrix} 2A & 0 & 0 \\ 0 & 2B & 0 \\ 0 & 0 & 2C \end{pmatrix}$$

tripale




$$\varphi_1 = 0 \qquad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3} \qquad \varphi_3 = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{A}{4} + \frac{3B}{4} & (A-B)\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ (A-B)\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3A}{4} + \frac{B}{4} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{A}{4} + \frac{3B}{4} & (B-A)\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ (B-A)\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}A + \frac{B}{4} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}(A+B) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}(A+B) & 0 \\ 0 & 0 & 3C \end{pmatrix}$$

d'où $J_Y = J_X$