Partiel de **Mécanique du Solide 2**

Durée 1h30' aucun document autorisé *novembre 2012*

Lors de la correction, une attention particulière sera portée à la critique et aux remarques émises par l'étudiant sur l'homogénéité et la vraisemblance de ses résultats.

Machine à vibrer les éléments préfabriqués en béton

Objectif de l'étude :

La figure (1) représente un système permettant de mélanger les éléments préfabriqués en béton.
Le repère (O_0, x_0, y_0, z_0) est lié au sol.

- ✓ Un châssis (1) supporté par 4 roues est solidaire du moule et du corps d'un moteur électrique. Il possède un mouvement de translation rectiligne par rapport au sol suivant x_0 repéré par le paramètre λ. La masse de (1) est M_1=1000kg. Son centre d'inertie est G_1 (figure 1). Le repère (G_1, x_1, y_1, z_1) est lié au châssis (1).
- ✓ L'ensemble tournant (2) est constitué du rotor du moteur électrique (2r) et de deux disques excentrés (2s). (2) est guidé en rotation par rapport à (1) par l'intermédiaire de deux paliers situés en A (liaison rotule) et en B (liaison linéaire annulaire d'axe Bz_1) (figure (2)). Le mouvement de rotation d'axe Oz_1 est paramétré par l'angle θ. $\theta=(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2})$. L'ensemble tourne à vitesse constante ω ($\theta=\omega.t$). La masse de (2) est M_2=6kg.

On note :

$\overrightarrow{OG_2}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_{b_2}$: le vecteur définissant la position du centre d'inertie de (2)

e : l'excentration des disques de l'ensemble (2). e=OC=40mm

m_d : la masse d'un disque. m_d=1,5kg. L'épaisseur des disques est supposée négligeable.

L : la cote des paliers par rapport au centre d'inertie de l'arbre du rotor O. L=152mm

Z : la cote sur l'axe z_1 des centres des disques par rapport au point O. Z=200mm

R : le rayon extérieur des disques. R=70mm

m_r : la masse du rotor (sans les disques). m_r=3kg.

On vérifie $M_2=m_r+2m_d$

$\left[I_{O,(2r),b_2}\right]=\begin{pmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & A_r & 0 \\ 0 & 0 & C_r \end{pmatrix}$ la matrice d'inertie du rotor (sans les disques).

C_r=2000 kg.mm^2. A_r=8000 kg.mm^2.

La vitesse de rotation de (2)/(1) est constante et est égale à ω=210 rd/s

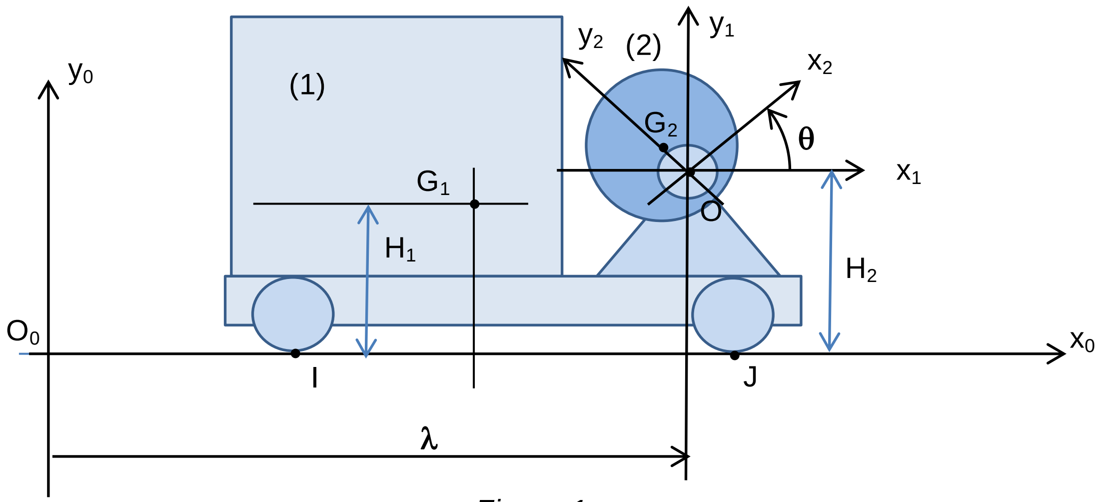

Figure 1

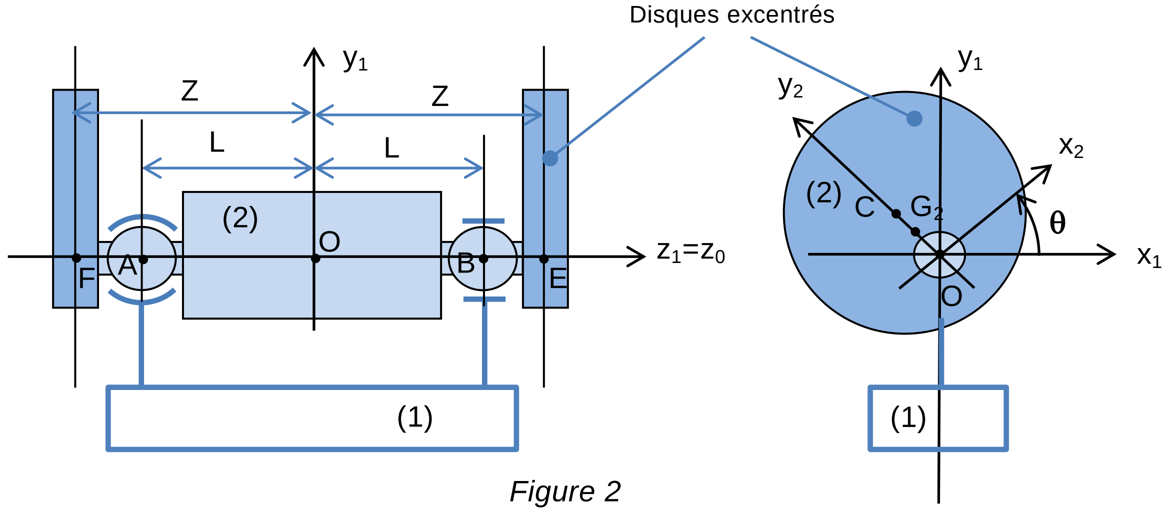

Figure 2

Partie 1 : Equation de mouvement du système

Objectif de l'étude : déterminer le mouvement de l'ensemble (1)/R_0

Question 1 (2pts) *: Calculer les composantes du centre d'inertie de l'ensemble tournant (2) dans la base de votre choix.*

Critères d'évaluation :

- *Clarté de la démarche retenue*
- *Exactitude des résultats*

Question 2 (3pts) *: Montrer que la matrice d'inertie de l'ensemble (2) s'écrit sous la forme*

$$[I_{O,(2),b_2}]=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

Calculer les différents termes de cette matrice. Application numérique.

Critères d'évaluation :

- *Clarté de la démarche retenue*
- *Exactitude des résultats*

Question 3 (5pts) : *Déterminer le torseur dynamique de l'ensemble (2) en mouvement par rapport à R_0 exprimé au point O. On rappelle que* $\omega=\dot{\theta}=$cste.

Critères d'évaluation :

- *Clarté de la démarche retenue*
- *Définition des grandeurs calculées*
- *Expressions littérales*
- *Exactitude des résultats*

Question 4 (2pts) : *L'équation de la résultante appliquée à l'ensemble (E)=(1)+(2) projetée sur l'axe x_0 nous donne l'équation de mouvement de l'ensemble. Elle s'écrit*

$\overrightarrow{R_{d\,(E/R_0)}}.\overrightarrow{x_0}=0$

En déduire l'expression de λ en fonction du temps. Donner l'amplitude du mouvement. Application numérique.

Critères d'évaluation :

- *Détermination de la résultante dynamique*
- *Détermination de λ*
- *Exactitude des résultats*

Partie 2 : Choix de l'architecture du système

Objectif : montrer l'intérêt d'un ensemble tournant symétrique

On étudie à présent le système non symétrique présenté figure 3 et comportant un seul disque de masse $2m_d$ et positionné à une distance OE=Z.

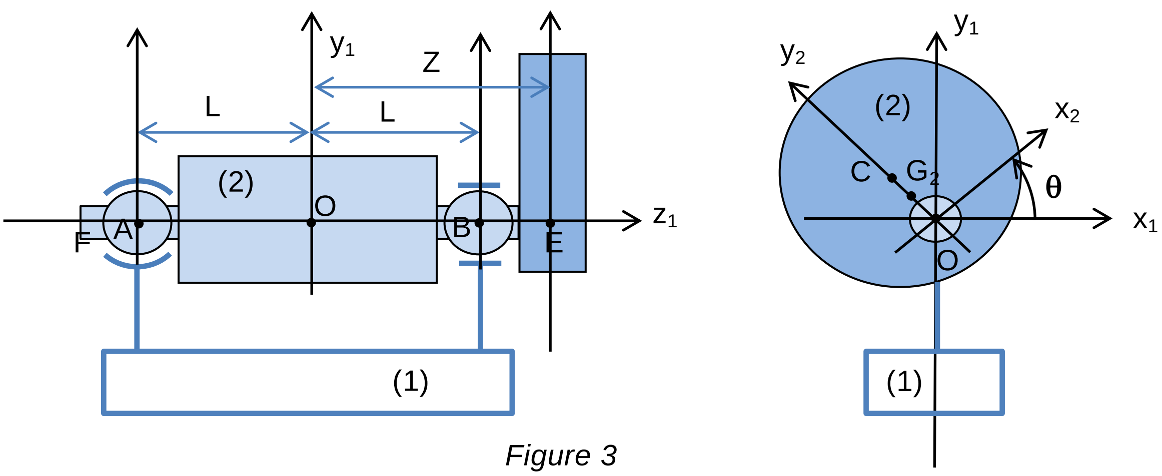

Figure 3

Question 5 (2pts) : *Montrer que la matrice d'inertie de l'ensemble (2) se met sous la forme*

$$[I_{O,(2),b_2}]=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

Critères d'évaluation :

- *Justification de la forme de la matrice*

Question 6 (2pts) : *Montrer que le moment cinétique de (2)/R_0 exprimé au point O s'écrit :*

$$\overrightarrow{\sigma_{O(2/R_0)}}=-D_2.\dot{\theta}.\overrightarrow{y_2}+M_2.\dot{\lambda}.z_2.\overrightarrow{y_0}+(C_2.\dot{\theta}-M_2.\dot{\lambda}.y_2.\cos\theta).\overrightarrow{z_0}$$

Critères d'évaluation :

- *Clarté de la démarche*
- *Justification du résultat démontré*

Question 7 (2pts) : *En déduire le torseur dynamique de (2)/R_0 exprimé au point O.*

On utilisera les résultats de la question 3 et on négligera les termes en $\dot{\lambda}$ dans les expressions de la résultante cinétique et du moment cinétique.

Critères d'évaluation :

- *Clarté de la démarche*
- *Définition des grandeurs calculées*
- *Exactitude des résultats littéraux*

Question 8 (2pts) : *Donner les expressions des torseurs des actions mécaniques de (1) sur (2) aux points A et au point B. Écrire le torseur équivalent au point O. On rappelle que* $\omega=\dot{\theta}=cste$.

Critères d'évaluation :

- *Écriture des torseurs en A et B*
- *Exactitude de l'expression littérale du torseur équivalent*

Question Bonus : *Le principe fondamental de la dynamique appliqué sur (S) et exprimé au point O permet, en négligeant l'action de la pesanteur d'écrire :*

$X_A+X_B=\overrightarrow{R_{d\ (2/R_0)}}.\overrightarrow{x_2}$

$Y_A+Y_B=\overrightarrow{R_{d\ (2/R_0)}}.\overrightarrow{y_2}$

$(-Y_A+Y_B).L=\overrightarrow{\delta_{0\ (2/R_0)}}.\overrightarrow{x_2}$

$(X_A-X_B).L=\overrightarrow{\delta_{0\ (2/R_0)}}.\overrightarrow{y_2}$

Les résultats de la question 8 permettent de mettre en évidence que les termes en $\lambda, \dot{\lambda}$ et $\ddot{\lambda}$ sont négligeables ce qui conduit aux expressions simplifiées suivantes :

$\overrightarrow{R_{d\ (2/R_0)}}=-M_2.y_2.\omega^2.\overrightarrow{y_2}$

$\overrightarrow{\delta_{0\ (2/R_0)}}=D_2.\omega^2.\overrightarrow{x_2}$

Avec y_2=20mm, L=152mm, M_2=6kg et $D_2=2,4.10^{-2}kg.m^2$.

En déduire les expressions littérales de X_A, Y_A, X_B et Y_B.

Identifier dans ces expressions les termes relatifs à l'excentration du centre d'inertie et ceux relatifs au produit d'inertie.

Comparer les grandeurs numériques et conclure sur l'intérêt d'un système symétrique.