Corrigé Partiel 2012 _ Machine à vibrer

Partie 1

Question 1

1

* 2 plans de symétrie $z = 0$ et $x_2 = 0$ $\Rightarrow$ $G \in$ plans $z_2 = x_2 = 0$
* on décompose en 2 groupes (2r) et (2s)

$$G(2r) \equiv O$$
$$G(2s) \equiv C \qquad \vec{OC} = e\,\vec{y_2}$$

* formule du barycentre $\quad M_2 \vec{OG_2} = m_r \vec{OO} + 2m_d \vec{OC}$

$$/y_2 \quad M_2\, y_2 = 2m_d \cdot e \qquad\qquad y_2 = \frac{2m_d}{M_2} e = \frac{e}{2}$$

1

Question 2

* 2 plans de symétrie $\perp$ passant par O $\Rightarrow$ $D_2 = E_2 = F_2 = 0$

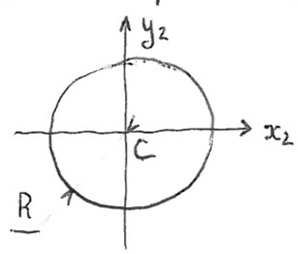
$$\Rightarrow \left[I_{O,(2),b_2}\right] = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

1

* on décompose $\quad \left[I_{O,(2),b_2}\right] = \left[I_{O,(2r),b_2}\right] + \left[I_{O,(2s),b_2}\right]$

connue

matrice d'inertie d'un disque de rayon R $\quad \left[I_{C,\text{disque},b_2}\right] = \begin{pmatrix} \frac{m_d R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_d R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_d R^2}{2} \end{pmatrix}$



$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ z \end{pmatrix}_{b_2}$$

1

on déduit
$$A_d = \frac{m_d R^2}{4} + m_d(e^2+Z^2)$$
$$B_d = \frac{m_d R^2}{4} + m_d Z^2$$
$$C_d = \frac{m_d R^2}{2} + m_d e^2$$
pour un disque

remarque : les produits d'inertie s'annulent (voir symétries)

* on additionne les matrices

$$A_2 = A_n + 2\left\{\frac{m_d R^2}{4} + m_d(e^2+Z^2)\right\}$$
$$B_2 = B_n + 2\left\{\frac{m_d R^2}{4} + m_d Z^2\right\}$$
$$C_2 = C_n + 2\left\{\frac{m_d R^2}{2} + m_d e^2\right\}$$
/ 1

* Application numérique

$\frac{m_d R^2}{4} = 1837{,}5 \text{ kg.mm}^2$ $\qquad A_2 = 13{,}65\ 10^4 \text{ kg mm}^2$

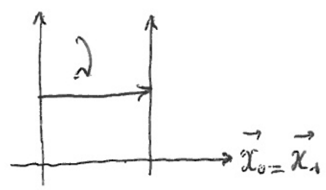
$m_d e^2 = 2400 \text{ kg mm}^2$ $\qquad B_2 = 13{,}17\ 10^4 \text{ kg.mm}^2$

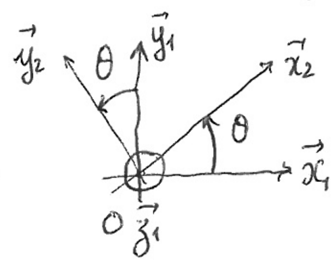
$m_d Z^2 = 60000 \text{ kg mm}^2$ $\qquad C_2 = 1{,}415\ 10^4 \text{ kg.mm}^2$ / 1

Question 3

$$\{\mathcal{D}(2/R_0)\} = \left\{\begin{matrix}\vec{R_d}(2/R_0) \\ \vec{\delta}_O(2/R_0)\end{matrix}\right\}_O$$

nature du mouvement : translation d'axe $\vec{x}_1$ + rotation autour de $O\vec{z}_1$





1

* $\vec{R_d}(2/R_0) = M_2\, \vec{\gamma}_{G_2,2/R_0}$

$$\vec{\gamma}_{G_2,2/R_0} = \vec{\gamma}_{G_2,2/1} + \vec{\gamma}_{G_2,1/R_0} + \cancelto{\vec{0}}{2(\vec{\Omega}_{1/R_0} \wedge \vec{V}_{G_2,2/1})}$$

$$\vec{\gamma}_{G_2,2/1} = \left.\frac{d\vec{V}_{G_2,2/1}}{dt}\right|_1 \qquad \vec{V}_{G_2,2/1} = \frac{d\vec{OG_2}}{dt} = \left.\frac{d(e\vec{y}_2)}{dt}\right|_1 = -\frac{e}{2}\dot{\theta}\,\vec{x}_2$$

$$\vec{\gamma}_{G_2,2/1} = -\frac{e}{2}\dot{\theta}^2\,\vec{y}_2 \quad \text{si } \omega = \dot{\theta} = \text{cste}$$

$\vec{\gamma}_{G_2,1/R_0} = \ddot{\lambda}\,\vec{x}_1$ (translation) $\qquad$ d'où $\vec{R_d}(2/R_0) = M_2\left\{\ddot{\lambda}\,\vec{x}_1 - \frac{e}{2}\dot{\theta}^2\,\vec{y}_2\right\}$

/ 2

* $\vec{\delta}_{O(2/R_0)}$ <u>où est donnée la matrice</u> ? en O

<u>le point O est il fixe ou confondu avec G_2</u> ? non

on déduit $\vec{\delta}_{O}(2/R_0) = \dfrac{d\vec{\sigma}_O(2/R_0)}{dt} + M_2\left(\vec{V}_{O/R_0} \wedge \vec{V}_{G_2,2/R_0}\right)$

$\vec{\sigma}_O(2/R_0) = \left[I_{O,(2),b_2}\right]\left\{\vec{\Omega}(2/R_0)\right\} + M_2\left(\vec{OG_2} \wedge \vec{V}_{O,2/R_0}\right)$ ①

$$= \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{b_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{b_2} + M_2\left(\frac{e}{2}\vec{y}_2 \wedge \dot{\lambda}\vec{x}_1\right)$$

$$= C_2\dot{\theta}\,\vec{z}_2 + \left(-\frac{e}{2}M_2\dot{\lambda}\cos\theta\,\vec{z}_2\right) = \left(C_2\dot{\theta} - M_2\frac{e}{2}\dot{\lambda}\cos\theta\right)\vec{z}_2$$ ①

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_{O(2/R_0)}}{dt}\right]_{/R_0} = \left(-M_2\frac{e}{2}\ddot{\lambda}\cos\theta + M_2\frac{e}{2}\dot{\lambda}\dot{\theta}\sin\theta\right.$$

$$M_2\left(\vec{V}_{O/R_0} \wedge \vec{V}_{G_2,2/R_0}\right) = M_2\left(\dot{\lambda}\vec{x}_1 \wedge \left(\dot{\lambda}\vec{x}_1 - \frac{e\dot{\theta}}{2}\vec{x}_2\right)\right) = -M_2\frac{e}{2}\dot{\lambda}\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{z}_2$$

On déduit $\vec{\delta}_{O(2/R_0)} = -M_2\dfrac{e}{2}\ddot{\lambda}\cos\theta\,\vec{z}_2$ ①

Question 4

$$\vec{Rd}(E/R_0)\cdot\vec{x}_0 = 0$$

$$\vec{Rd}(E/R_0) = \vec{Rd}(1/R_0) + \vec{Rd}(2/R_0)$$

$\vec{Rd}(1/R_0)$: $M_1\ddot{\lambda}\,\vec{x}_1$

$\vec{Rd}(2/R_0)$: $M_2\ddot{\lambda}\,\vec{x}_1 - M_2\dfrac{e}{2}\dot{\theta}^2\,\vec{y}_2$

$$\vec{Rd}(E/R_0)\cdot\vec{x}_0 = (M_1+M_2)\ddot{\lambda} + M_2\frac{e}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$ ①

en intégrant $(M_1+M_2)\dot{\lambda} = M_2\dfrac{e}{2}\dot{\theta}\cos\theta$ avec $\dot{\lambda}(0)=0$ $\theta = \omega t$

en intégrant $(M_1+M_2)\lambda = M_2\dfrac{e}{2}\sin\theta = M_2\dfrac{e}{2}\sin\omega t$ avec $\lambda(0)=0$

$$\lambda = \frac{M_2 . e}{2(M_1+M_2)}\sin\omega t$$ amplitude $\simeq$ 0,12 mm ①

Partie 2

Question 5

Il n'y a plus qu'un plan de symétrie $O y_2 z_2$ d'où $E_2 = F_2 = 0$ /②

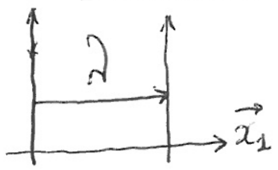
Question 6

Torseur cinétique de $2/R_0$ en O $\quad \{\mathcal{C}_{2/R_0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_C}(2/R_0) \\ \overrightarrow{\sigma_{O,(2/R_0)}} \end{Bmatrix}_O$

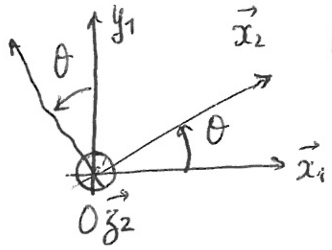
* $\overrightarrow{R_C}(2/R_0) = M_2 \overrightarrow{V}_{G_2,2/R_0} \qquad \overrightarrow{OG_2} = y_2 \cdot \vec{y_2} + z_2 \vec{z_2}$

$\vec{z_2}$ est fixe $\quad \overrightarrow{V}_{G_2,2/R_0} = -y_2 \cdot \dot{\theta}\, \vec{x_2} + \dot{\lambda}\, \vec{x_1}$

<u>Nature du mouvement</u> :



Translation $\vec{y_2}$ d'axe $\vec{x_1}$



Rotation autour de $O\vec{z_2}$

$\overrightarrow{R_C}(2/R_0) = M_2(\dot{\lambda}\vec{x_1} - y_2\dot{\theta}\,\vec{x_2})$ /①

* $\overrightarrow{\sigma_{O,(2/R_0)}}$ <u>où est donnée la matrice</u> ? en O

<u>nature du point O</u> ? O n'est pas fixe

$$\overrightarrow{\sigma_{O,(2/R_0)}} = [I_{O,(2),b_2}]\{\overrightarrow{\Omega_{2/R_0}}\} + M_2(\overrightarrow{OG_2} \wedge \overrightarrow{V_{O,2/R_0}})$$

$$= \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + M_2 \left\{ (y_2 \cdot \vec{y_2} + z_2 \vec{z_2}) \wedge \dot{\lambda}\, \vec{x_1} \right\}$$

$$= C_2\dot{\theta}\,\vec{z_2} - D_2\dot{\theta}\,\vec{y_2} + (-M_2 \underbrace{y_2}_{\cos\theta} \dot{\lambda}\, \vec{z_2} + M_2 z_2 \dot{\lambda}\, \vec{y_1})$$

on vérifie bien $\overrightarrow{\sigma_{O,2/R_0}} = -D_2\dot{\theta}\,\vec{y_2} + M_2 z_2 \dot{\lambda}\, \vec{y_0} + \{C_2\dot{\theta} - M_2 \underbrace{y_2}_{\cos\theta} \dot{\lambda}\}\, \vec{z_0}$ /②

(démarche /1)

Question 7

Torseur dynamique de $2/R_0$ au point O. $\quad \{\mathcal{D}_{2/R_0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(2/R_0) \\ \vec{\delta}_{O,(2/R_0)} \end{Bmatrix}_O$

* $\overrightarrow{R_d}(2/R_0) = \dfrac{d\overrightarrow{R_c}(2/R_0)}{dt}$

$$\overrightarrow{R_d}(2/R_0) = \frac{d}{dt}\left(-M_2 y_2 \dot{\theta}\,\vec{x_2}\right) = -M_2 y_2 . \dot{\theta}^2\,\vec{y_2}$$

(1)

* $\vec{\delta}_O(2/R_0) = \dfrac{d\vec{\sigma}_O(2/R_0)}{dt} + M_2\left(\vec{V}_{C/R_0} \wedge \vec{V}_{G_2,2/R_0}\right)$

$$= \frac{d}{dt}\left\{-D_2\dot{\theta}\,\vec{y_2} + C_2\dot{\theta}\,\vec{z_0}\right\} + M_2\left(\dot{\lambda}\,\vec{x_1} \wedge \left(\dot{\lambda}\,\vec{x_1} - y_2\dot{\theta}\,\vec{x_2}\right)\right)$$

$$= D_2\dot{\theta}^2\,\vec{x_2}$$

(1) (démarche /1)

Question 8

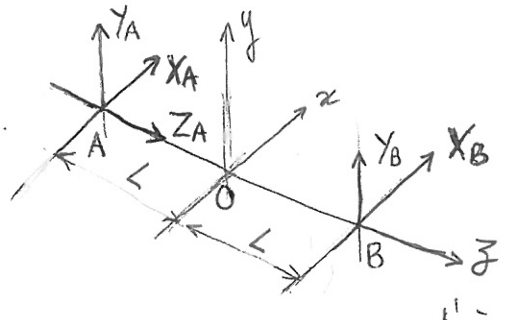
Torseur en A de $1 \to 2$ $\quad \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{A,b_2}$ au point O $\quad \vec{M}_{O(\vec{F_A})} = \vec{M}_{A(\vec{F_A})} + \left(\vec{OA} \wedge \vec{F_A}\right)$

$$= -L\,\vec{z_1} \wedge \vec{F_A} = \begin{pmatrix} LY_A \\ -LX_A \\ 0 \end{pmatrix}_{b_2}$$

(1)

Torseur en B de $1 \to 2$ $\quad \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,b_2}$ au point O $\quad \vec{M}_{O(\vec{F_B})} = \vec{M}_{B(\vec{F_B})} + \left(\vec{OB} \wedge \vec{F_B}\right)$

$$= L\,\vec{z_1} \wedge \vec{F_B} = \begin{pmatrix} -LY_B \\ LX_B \\ 0 \end{pmatrix}_{b_2}$$



d'où $\quad \{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_A + X_B & L(Y_A - Y_B) \\ Y_A + Y_B & L(X_B - X_A) \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{O,b_2}$

(1)