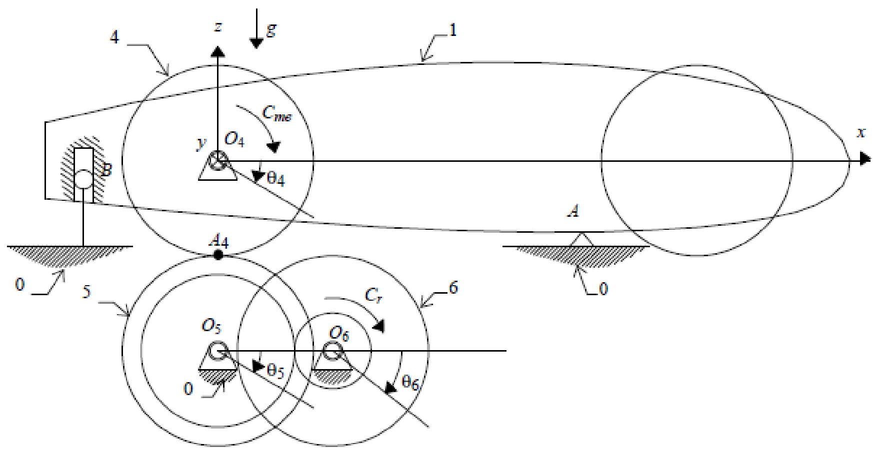
ENONCE



On s'intéresse à la conception du banc d'essai portable qui est destiné à reproduire en laboratoire (avec un véhicule immobile) les conditions de course dans le but d'évaluer les différents développements apportés au véhicule (moteur, pneumatiques, stratégie de course...).

Description du banc :

La ***photographie 3*** présente l'architecture mécanique du banc qui est fixé sur le sol. Le véhicule est lié au banc comme suit (***figure 3***) :

- le châssis 1 est en contact ponctuel avec le banc 0 en A, et en liaison linéaire annulaire en B (qui assure l'arrêt du véhicule en translation),
- la roue motrice 4 du véhicule est en contact avec le rouleau 5 du banc. Le rouleau 5 entraîne par un engrenage extérieur une roue d'inertie 6 que l'on pourra freiner ou accélérer par l'intermédiaire d'un moteur électrique asservi, piloté en couple.

L'étude du banc d'essai comporte les phases suivantes :

- ***A*** *: Fixer la conception mécanique du banc (caractéristiques inertielles, choix du rapport de réduction...),*
- ***B*** *: Déterminer les consignes de couple à envoyer au moteur électrique et spécifier le moteur électrique,*
- ***C*** *: Spécifier les capteurs et les chaînes de mesure de couple et de vitesse,*
- ***D*** *: Procéder à la synthèse de la commande en couple du moteur.*

Partie A.

Le traitement des phases **A** et **B** requiert la modélisation du banc selon les notations et les hypothèses suivantes :

- le rouleau d'entraînement 5 de rayon R, d'inertie I_5 par rapport à l'axe de rotation $O_5\,\vec{y}$ est en liaison pivot sans frottement, d'axe $O_5\,\vec{y}$, de paramètre θ_5, avec le bâti 0 du banc sur lequel, la roue 4 est en contact.
- la roue d'inertie 6, d'inertie I_6 par rapport à l'axe de rotation $O_6\,\vec{y}$ en liaison pivot sans frottement, d'axe $O_6\,\vec{y}$, de paramètre θ_6, avec le bâti 0 du banc soumise à un couple de pilotage $C_r\,\vec{y}$ par l'intermédiaire d'un moteur dont le corps est solidaire du bâti 0.
- la roue 4, de rayon R, d'inertie I, en liaison pivot sans frottement, d'axe $O_4\,\vec{y}$, de paramètre θ_4. L'action du châssis 1 sur la roue 4 peut être modélisée par le torseur : $\left[F_{1\to4}\right]_{04} = \begin{bmatrix} T_{14}\,\vec{x} + N_{14}\,\vec{z} \\ C_{me}\,\vec{y} \end{bmatrix}_{04}$. Le contact entre la roue 4 et le rouleau 5 est du même type que entre la roue et la route, à savoir un contact ponctuel avec frottement (ou adhérence) mettant en valeur la résistance au roulement, soit $\left[F_{5\to4}\right]_{A_4} = \begin{bmatrix} -T_{54}\,\vec{x} + N_{54}\,\vec{z} \\ -N_{54}r\ \mathrm{signe}\left(\dot{\theta}_4\right)\vec{y} \end{bmatrix}_{A_4}$. On considère qu'il y a roulement sans glissement entre 4 et 5.

La liaison entre le rouleau 5 et la roue d'inertie 6 se fait par un engrenage extérieur supposé parfait. On peut modéliser cette liaison comme un contact ponctuel avec frottement (ou adhérence) où il existe roulement sans glissement. Soit u le rapport de réduction avec $u = -\dot{\theta}_6/\dot{\theta}_5$.

On désire que le moteur du véhicule fonctionne dans les mêmes conditions que sur piste. On cherche donc à déterminer le rapport de réduction et le couple C_r à appliquer pour que le couple moteur en essai C_{me} soit identique au couple moteur en course C_m obtenu à la question II. A cet effet, on isole l'ensemble S, composé des 3 solides 4, 5 et 6 : $S = \{4{,}5{,}6\}$.

<u>Question préliminaire</u> : expliquer la démarche permettant de calculer le couple moteur en fonction des données du problème

Apport de cours

Le théorème de l'énergie cinétique se démontre à partie de la loi fondamentale de la dynamique en multipliant les membres de l'équation par le champ de vitesse réelle.

$$\int_{(P)} \overrightarrow{F_{\to P}} \cdot \overrightarrow{V_{P/R_g}} = \int_{(P)} m\, \overrightarrow{\gamma_{P/R_g}} \cdot \overrightarrow{V_{P/R_g}}$$

Le principe des actions réciproques permet d'écrire le premier membre en introduisant la puissance des actions mécaniques intérieures et extérieures au système.
Le deuxième membre s'écrit en fonction de l'énergie cinétique du système.

$$\Rightarrow\ P_{ext\to\Sigma,R_g} + P_{int} = \frac{d\mathrm{Ec}(\Sigma/R_g)}{dt}$$

Remarque 1 : le théorème de l'énergie cinétique conduit à <u>une seule équation scalaire</u>

Remarque 2 : l'équation obtenue fait intervenir la puissance des efforts intérieurs d'où la nécessité d'effectuer un <u>bilan d'actions mécaniques extérieures et intérieures</u> au système isolé.

Remarque 3 : le théorème de l'énergie cinétique est particulièrement intéressant pour les mécanismes à un degré de liberté (une loi entrée-sortie) pour la détermination du couple moteur (ou de la puissance motrice)

La démarche d'application du théorème de l'énergie cinétique est :

1- On isole le système (en général tout sauf l bâti)
2- On calcule l'énergie cinétique du système
3- On effectue un bilan des actions mécaniques intérieures et extérieures au système isolé (en s'appuyant sur le graphe des liaisons)
4- On calcule la puissance des actions mécaniques extérieures
5- On calcule la puissance des actions mécaniques intérieures
6- On écrit l'équation et on déduit l'expression recherchée.

Résolution du problème posé

1- Pour déterminer le couple moteur, on applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble du système sauf la voiture et le bâti.

Remarque : on peut également isoler la voiture (1) avec si l'on veut.

$$P_{ext\to\Sigma,R_g} + P_{int} = \frac{d\mathrm{Ec}(\Sigma/R_g)}{dt} \qquad [1]$$

2- On détermine l'énergie cinétique des différents éléments constituant le système (Σ)

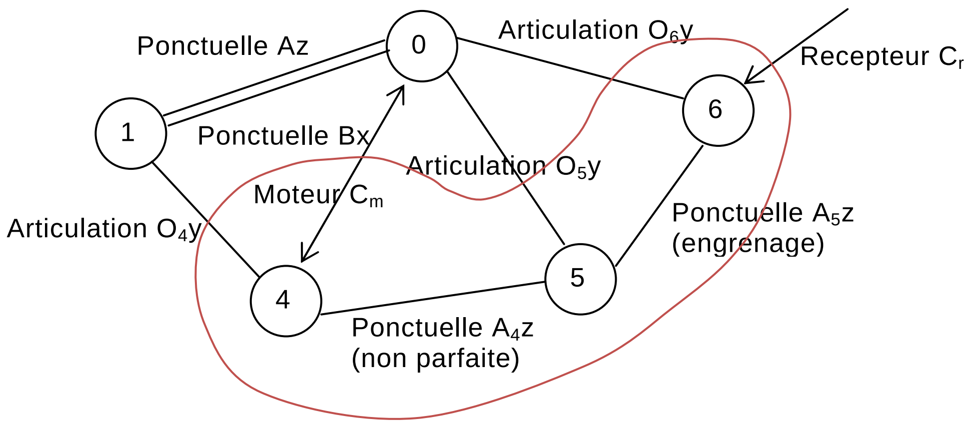
3- On effectue un bilan des actions mécaniques intérieures et extérieures au système

4- On calcule la puissance des actions mécaniques extérieures

5- On calcule la puissance des actions mécaniques intérieures

Remarque : si on isole l'ensemble, le couple moteur intervient dans le calcul de la puissance des efforts intérieurs. Si on isole tout sauf la voiture comme c'est le cas ici, le couple moteur intervient dans la puissance extérieure au système.

6- On écrit l'équation [1] et on déduit l'expression du couple moteur



Question 1 : Ecrire l'énergie cinétique de l'ensemble matériel (S) dans le mouvement des solides par rapport au repère galiléen en fonction des paramètres.

Apport de cours

$$P_{ext\to\Sigma,R_g} + P_{int} = \frac{d\mathrm{Ec}(\Sigma/R_g)}{dt}$$

Définition pour un solide (S) : $\mathrm{Ec}(S/R_g) = \frac{1}{2}.\int_{(P\epsilon S)} V_{(P/R_g)}{}^2 .dm$

Remarque 1 : l'énergie cinétique est galiléenne

Remarque 2 : dans le cas d'une masse M concentrée en un point P

$\mathrm{Ec}(S/R_g) = \frac{1}{2}.M.V_{(P/R_g)}{}^2$

Détermination de l'énergie cinétique pour un solide (S) :
On démontre facilement à partir de la définition l'expression générale

$$\mathrm{Ec}(S/R_g) = \frac{1}{2}.M.V_{(G\epsilon S/R_g)}{}^2 + \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{(S/R_g)}}.[I_{G,(S)}].\overrightarrow{\Omega_{(S/R_g)}} \qquad [2]$$

Remarque 3 : cette expression est utilisée dans le cas d'un mouvement quelconque lorsque la matrice d'inertie du solide (S) est donnée en G (ce qui est fréquemment le cas)

- ✓ Pour un solide (S) de masse m en translation :
  $\mathrm{Ec}(S/R_g) = \frac{1}{2}.m.V_{(S/R_g)}{}^2$
- ✓ Pour un solide (S) en rotation autour d'un axe fixe et de moment d'inertie I autour de cet axe : $\mathrm{Ec}(S/R_g) = \frac{1}{2}.I.\dot{\theta}^2$
- ✓ Pour un solide (S) en rotation autour d'un point fixe O :
  $\mathrm{Ec}(S/R_g) = \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{(S/R_g)}}.[I_{O,(S)}].\overrightarrow{\Omega_{(S/R_g)}}$
- ✓ Pour les autres cas, on utilise l'expression [2].

Résolution du problème posé

a- On décompose

$$\mathrm{Ec}(\Sigma/R_g) = \mathrm{Ec}(4/R_g) + \mathrm{Ec}(5/R_g) + \mathrm{Ec}(6/R_g)$$

b- On détermine l'énergie cinétique de chaque solide en identifiant la nature des mouvements et en fonction des données cinétiques

$4/R_g$: mouvement de rotation autour de l'axe O_4y de moment d'inertie I par rapport à O_4y.

$\Rightarrow\ \mathrm{Ec}(4/R_g) = \frac{1}{2}.\mathrm{I}.\dot{\theta}_4{}^2$

$5/R_g$: mouvement de rotation autour de l'axe O_5y de moment d'inertie I_5 par rapport à O_5y.

$\Rightarrow\ \mathrm{Ec}(5/R_g) = \frac{1}{2}.\mathrm{I}_5.\dot{\theta}_5{}^2$

$6/R_g$: mouvement de rotation autour de l'axe O_6y de moment d'inertie I_6 par rapport à O_6y.

$\Rightarrow\ \mathrm{Ec}(6/R_g) = \frac{1}{2}.\mathrm{I}_6.\dot{\theta}_6{}^2$

c- On additionne les termes et on écrit l'expression en fonction des termes donnés en utilisant les relations cinématiques

Relation de roulement sans glissement entre (4) et (5) : $\dot{\theta}_4$=-$\dot{\theta}_5$

Condition de vitesse nulle entre (5) et (6) (engrenage) : $\dot{\theta}_6$=-$u.\dot{\theta}_5$

$$\mathrm{Ec}(\Sigma/R_g) = \frac{1}{2}.\{\mathrm{I} + \mathrm{I}_5 + \mathrm{I}_6\mathrm{u}^2\}.\dot{\theta}_4{}^2$$

Questions 2 et 3 : Ecrire la puissance extérieure exercée par toutes les forces extérieures à (S) – Justifier que la puissance développée par les interefforts entre (5) et (6) P_{56} est nulle et calculer la puissance des interefforts en fonction de N_{54}, r et $\dot{\theta}_4$

Apport de cours

$$P_{ext\to\Sigma,R_g} + P_{int} = \frac{dEc(\Sigma/R_g)}{dt}$$

✓ Le calcul du terme $\int_{(P)} \overrightarrow{F_{\to P}} \,.\overrightarrow{V_{P/R_g}}$ issu de la loi fondamentale conduit <u>dans le cas où on isole un seul solide à la somme des puissances exercées par les actions mécaniques extérieures</u> : $P_{ext\to(S),R_g}$

Remarque 1 : la puissance extérieure est galiléenne

Pour une force $\vec{F}$ exercée en un point A du solide (S), $P_{\vec{F}\to(S)} = \vec{F}.\overrightarrow{V_{A,S/R_g}}$

Exemple de l'action de la pesanteur : $P_{pes\to(S)} = -mg.\vec{z}.\overrightarrow{V_{G,S/R_g}}$ avec z vertical vers le haut et m la masse du solide (S)

Pour un couple $\vec{C}$ exercé sur le solide (S), $P_{\vec{C}\to(S)} = \vec{C}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$

Exemple d'un couple moteur C_m exercé sur (S) : $P_{Cm\to(S)} = C_m.\omega_m$ si (S) a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe de vitesse angulaire ω_m.

Pour une action mécanique quelconque exercée sur (S), la puissance s'écrit sous la forme du comoment de deux torseurs :

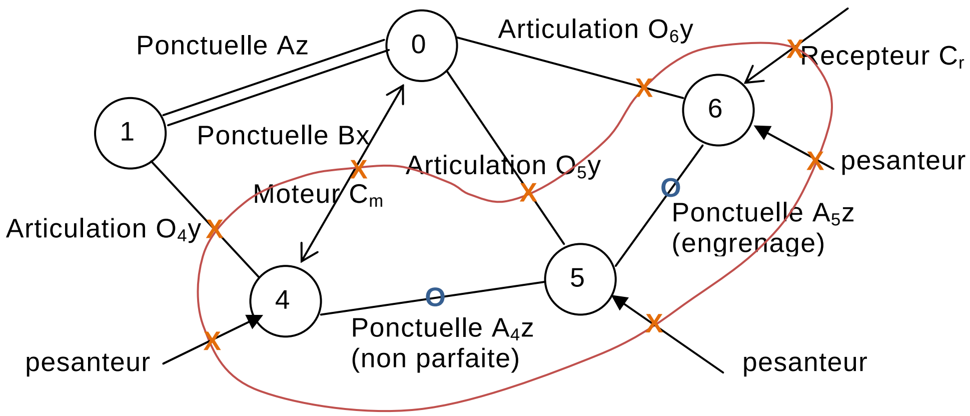
$$P_{ext\to(S),R_g} = \{\mathcal{F}_{AM\to(S)}\}.\{\mathcal{C}_{(S)/R_g}\} = \vec{F}.\overrightarrow{V_{A,S/R_g}} + \overrightarrow{M_A}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$$

Remarque 2 : dans le cas d'une action extérieure de liaison, <u>si la liaison est supposée parfaite et si le solide extérieur est fixe par rapport au repère galiléen</u>, $P_{ext\to(S),R_g} = 0$

✓ Le calcul du terme $\int_{(P)} \overrightarrow{F_{\to P}} \,.\overrightarrow{V_{P/R_g}}$ issu de la loi fondamentale conduit <u>dans le cas où on isole un ensemble de solides à la somme des puissances des actions mécaniques extérieures et intérieurs au système</u> : $P_{ext\to(S),R_g} + P_{int}$

Résolution du problème posé

a- On peut s'appuyer sur le graphe des contacts



Actions extérieures : X
Actions intérieures : O

b- On calcule la puissance extérieure au système

- L'action de la pesanteur sur (6) s'exerce au centre d'inertie O_6 qui est également centre de rotation autour du bâti (donc sa vitesse par rapport au repère galiléen est nulle) : la puissance est donc nulle
- Il en est de même pour l'action de la pesanteur sur (4) et sur (5).
- Les liaisons (0)-(6), (0)-(5) et (1)-(4) sont des articulations parfaites et (0) et (1) sont liés au repère galiléen donc les puissances sont nulles
- La puissance exercée par le couple moteur est $P_{04} = C_m.\dot{\theta}_4$
- La puissance exercée par le couple récepteur est $P_{ext6} = C_r.\dot{\theta}_6$

c- On calcule la puissance des efforts intérieurs

La liaison (5)-(6) étant une liaison ponctuelle parfaite (engrenage), la puissance des efforts intérieurs entre (5) et (6) est nulle. $P_{56}=0$

Remarque 2 : le théorème de l'énergie cinétique dans ce cas fait intervenir les actions mécaniques intérieures au système isolé (actions de liaisons entre solides) ⇒ Il est donc nécessaire de procéder à un bilan des actions mécaniques extérieures et intérieures au système isolé.

On démontre facilement que la puissance des actions mécaniques intérieures entre deux solides (S_i) et (S_j) s'écrit comme le comoment de deux torseurs :
$P_{int} = \left\{\mathcal{F}_{(S_i)\to(S_j)}\right\}.\left\{\mathcal{C}_{(S_j)/(S_i)}\right\}$

Remarque 3 : la puissance des actions mécaniques intérieures est nulle si la liaison entre les solides (S_i) et (S_j) est supposée parfaite. $P_{(S_i)\leftrightarrow(S_j)} = 0$

Sur le graphe des contacts, on note une deuxième action mécanique intérieure correspondant à la liaison (4)-(5).
Cette liaison n'est pas parfaite ; il faut donc revenir à l'expression générale de la puissance intérieure $\Rightarrow\ P_{45} = \{\mathcal{F}_{5\to4}\}.\{\mathcal{C}_{4/5}\}$

$$\{\mathcal{F}_{5\to4}\} = \left\{\begin{matrix} -T_{54}.\vec{x} + N_{54}.\vec{z} \\ -N_{54}.r.\mathrm{sign}(\dot{\theta}_{4/5}).\vec{z} \end{matrix}\right\}_{A_4}$$

$$\{\mathcal{C}_{4/5}\} = \left\{\begin{matrix} \dot{\theta}_{4/5}.\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{A_4} = \left\{\begin{matrix} 2.\dot{\theta}_4.\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{A_4}$$

On déduit $P_{45} = -2.N_{54}.r.|\dot{\theta}_4|$

Questions 2 et 3 : En déduire l'expression du couple moteur Cm en fonction de Cr, I, I_5, I_6, N_{54}, u, r et $\ddot{\theta}_4$

Apport de cours

Résolution du problème posé

On écrit l'équation du théorème de l'énergie cinétique

$$P_{ext\to\Sigma,R_g} + P_{int} = \frac{dEc(\Sigma/R_g)}{dt}$$

et on remplace les expressions trouvées précédemment.

On obtient :

$$C_m = \{I + I_5 + I_6 u^2\}.\ddot{\theta}_4 + 2.N_{54}.r - C_r.u$$