

Examen de Mécanique du Solide 2 (I3ICMG20)

Durée 2h30" aucun document autorisé

Janvier 2009

Lors de la correction, une attention particulière sera portée aux démarches présentées par l'étudiant pour l'application des lois fondamentales.

Les 4 parties A1, A2, A3 et B sont indépendantes.

Le robot Spirit

Introduction :

La mission Mars Exploration Rover (MER) est une mission spatiale confiée à la NASA. Elle a pour but d'explorer les sols de la planète Mars pour y rechercher la présence ancienne et prolongée d'eau. Cette exploration est réalisée grâce à deux rovers automatiques lancées depuis Cap Canaveral. Le premier rover se nomme robot Spirit (**Figure 1**). Il a été lancé le 10 juin 2003 et s'est posé le 3 janvier 2004 dans le cratère Gusev, une dépression de 170 km de diamètre qui a peut-être accueilli un lac. Le second rover se nomme robot Opportunity, il a été lancé le 8 juillet 2003 et s'est posé le 24 janvier 2004 sur Meridiani Planum.

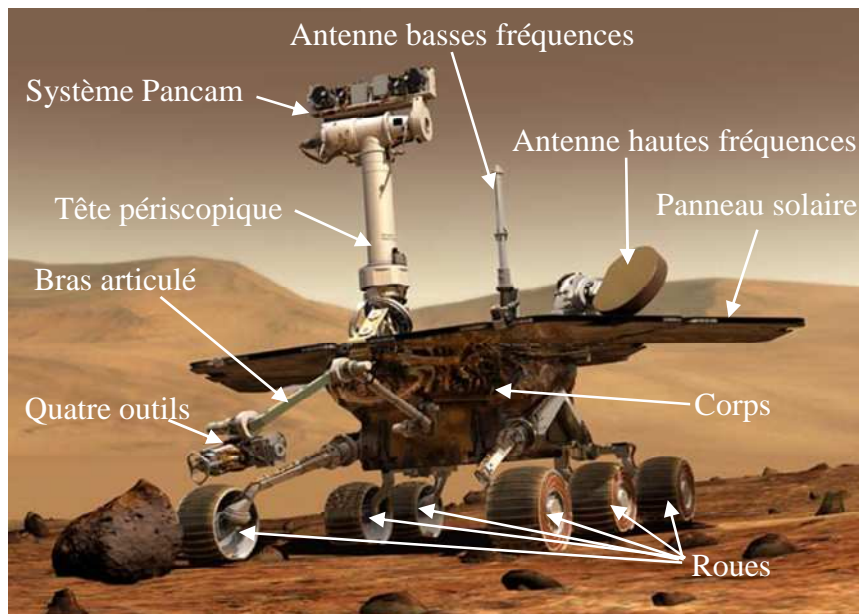


Figure 1

Présentation générale du robot :

Les principaux composants du robot Spirit sont :

- Un corps dont la fonction est d'assurer la liaison entre les divers composants. Il supporte des batteries qui sont chargées par des capteurs solaires et protège également l'électronique embarquée des agressions extérieures.
- Une tête périscopique orientable dont la fonction est d'orienter le système de vision appelé «Pancam » qui se trouve à 1,4m de hauteur. Ce dernier fournit une vue 3D de l'environnement. Le traitement des images acquises par les caméras du système Pancam permet à Spirit de réaliser une cartographie des terrains et donc de trouver de manière autonome son chemin en évitant les obstacles. Cette autonomie est renforcée par l'utilisation de 4 caméras de direction supplémentaires situées sur le corps.

- Six roues, animées chacune par un motoréducteur, dont la fonction est d'assurer le déplacement de Spirit sur un sol caillouteux. Les deux roues avant et arrière possèdent en supplément un moteur de direction permettant au robot d'effectuer des changements de direction jusqu'à un demi tour sur place.
- Un bras articulé, dont la fonction est d'amener quatre outils (une foreuse, un microscope et deux spectromètres) à proximité d'une roche à étudier. L'étude de la roche par ces quatre outils se fait par des carottages horizontaux.
- Un système de communication et des antennes hautes et basses fréquences, dont la fonction est de permettre à Spirit de communiquer avec la terre.

L'objet de ce sujet est l'étude partielle de solutions techniques retenues, d'une part, sur le bras articulé du robot Spirit (partie A) et, d'autre part, sur les motorisations des roues du robot (Partie B). Dans chacune des parties de nombreuses questions sont indépendantes et ne demandent pas de développements mathématiques importants.

PARTIE A - ETUDE DU BRAS ARTICULE DU ROBOT SPIRIT

On adoptera pour partie la modélisation simplifiée présentée Figure 2.

Modélisation cinématique et paramétrage:

- Le corps du robot est repéré 0. On lui attache un repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et le point O_0 est à la hauteur h_0 du sol, supposé constante.
- La liaison entre le solide 1 et le corps du robot est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (O_0, \vec{z}_0) . On attache au solide 1 le repère $\mathcal{R}_1 = (O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, on pose $\overrightarrow{O_0O_1} = a_1 \cdot \vec{x}_1 + c_1 \cdot \vec{z}_1$ et $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ avec $-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2$.
- La liaison entre le bras 2 et le solide 1 est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (O_1, \vec{y}_1) . On attache au solide 2 le repère $\mathcal{R}_2 = (O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, on pose $\overrightarrow{O_1O_2} = a_2 \cdot \vec{x}_2$ et $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ avec $-\pi/4 \leq \theta_2 \leq \pi/4$.
- La liaison entre l'avant bras 3 et le bras 2 est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (O_2, \vec{y}_2) . On attache au solide 3 le repère $\mathcal{R}_3 = (O_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, on pose $\overrightarrow{O_2O_3} = a_3 \cdot \vec{x}_3$ et $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $0 \leq \theta_3 \leq \pi$.
- La liaison entre le solide 4 et l'avant bras 3 est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (O_3, \vec{y}_3) . On attache au solide 4 le repère $\mathcal{R}_4 = (O_3, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$, on pose $\overrightarrow{O_3O_4} = -b_4 \cdot \vec{y}_4 - c_4 \cdot \vec{z}_4$ et $\theta_4 = (\vec{x}_3, \vec{x}_4)$ avec $-\pi \leq \theta_4 \leq \pi$.
- La liaison entre le solide 5 (sur lequel se trouvent les quatre outils d'étude de la roche) et le solide 4 est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (O_4, \vec{z}_4) .

Données massiques:

- Le solide 1, de masse m_1 , a pour centre de gravité le point G_1 tel que $\overrightarrow{O_0G_1} = a_1/2 \cdot \vec{x}_1 + c_1 \cdot \vec{z}_1$.
Son opérateur d'inertie, en G_1 sur la base \mathcal{B}_1 est :

$$\bar{I}_{G_1}(1) = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

- Le solide 2, de masse m_2 , a pour centre de gravité le point G_2 tel que $\overrightarrow{O_1G_2} = a_2/2 \cdot \vec{x}_2$. Son opérateur d'inertie, en G_2 sur la base \mathcal{B}_2 est :

$$\bar{I}_{G_2}(2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)}$$

- Le solide 3, de masse m_3 , a pour centre de gravité le point G_3 tel que $\overrightarrow{O_2G_3} = a_3/2 \cdot \vec{x}_3$. Son opérateur d'inertie, en G_3 sur la base \mathcal{B}_3 est :

$$\bar{I}_{G_3}(3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

- Lorsque le solide 5 est immobile par rapport au solide 4, ils ont pour centre de gravité le point $G_{45} = O_4$. Leur masse est $m_{45} = m_4 + m_5$ et leur opérateur d'inertie, en G_{45} sur la base \mathcal{B}_4 est :

$$\bar{I}_{G_{45}}(4+5) = \begin{bmatrix} A_{45} & 0 & 0 \\ 0 & B_{45} & 0 \\ 0 & 0 & C_{45} \end{bmatrix}_{(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)}$$

Données:

$h_0 = 0,5\text{m}$	$a_1 = 0,1\text{m}$	$c_1 = 0,1\text{m}$
$a_2 = 0,5\text{m}$	$a_3 = 0,8\text{m}$	$b_4 = 0,1\text{m}$
$c_4 = 0,15\text{m}$		
$A_1 = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$B_1 = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$C_1 = 6,8 \cdot 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
$D_1 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$E_1 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$F_1 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
$A_2 = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$B_2 = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$C_2 = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
$A_3 = 1,4 \cdot 10^{-1} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$B_3 = 1,4 \cdot 10^{-1} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$C_3 = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
$A_{45} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$B_{45} = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$C_{45} = 6,8 \cdot 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
$m_1 = 0,9\text{kg}$	$m_2 = 1,8\text{kg}$	$m_3 = 1,2\text{kg}$
$m_{45} = 3,2\text{kg}$		

- Les positions relatives $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ de chaque solide sont pilotées par des actionneurs notés M_1, M_2, M_3, M_4 constitués d'un moteur, d'un réducteur irréversible et d'un codeur. Les masses de ces actionneurs sont intégrées dans le paramétrage proposé. Ils fournissent des actions mécaniques modélisées par :

$$\begin{aligned} \{F_{M_1}(0 \rightarrow 1)\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{mot,0 \rightarrow 1} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{O_0} & \{F_{M_2}(1 \rightarrow 2)\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{mot,1 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \end{array} \right\}_{O_1} \\ \{F_{M_3}(2 \rightarrow 3)\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{mot,2 \rightarrow 3} \vec{y}_2 \end{array} \right\}_{O_2} & \{F_{M_4}(3 \rightarrow 4)\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{mot,3 \rightarrow 4} \vec{y}_3 \end{array} \right\}_{O_3} \end{aligned}$$

- L'accélération de la pesanteur sur Mars est telle que $\vec{g} = -g \vec{z}_0$, $g \approx 3.7 \text{ m/s}^2$
- On définit les positions particulières du bras articulé suivantes :
 - ✓ La position de repos, notée P_r ($\theta_1 = -\pi/2, \theta_2 = 0, \theta_3 = \pi$), est la position du bras articulé lorsqu'il n'est pas en fonctionnement.

- ✓ La position initiale de déploiement, notée P_i ($\theta_1 = 0, \theta_2 = -\pi/4, \theta_3 = \pi/2$), est la position adoptée par le bras avant de se déployer complètement vers la roche.
- ✓ La position horizontale, notée P_h ($\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0$).
- ✓ La position verticale, notée P_v ($\theta_1 = 0, \theta_2 = -\pi/4, \theta_3 = 0$).

Partie A1 - Paramétrage: (3,5 pts)

Q1 : Pour la position remarquable P_i , déterminer le vecteur position $\overrightarrow{O_0O_3}$ dans le repère \mathcal{R}_0 , on pourra s'aider d'un schéma dessiné dans le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$. Faire l'application numérique.

Remarque : On fera attention au sens positif des angles dans le plan proposé, par exemple, $\theta_2 = -\pi/4$ correspond à une orientation du bras vers le haut.

Q2 : Lors de l'étude d'une roche la position du solide 5 doit être horizontale ($\vec{z}_0 = \vec{z}_4$). Montrer la pertinence de la conception de ce bras articulé pour satisfaire cette condition en déterminant la relation entre les angles $\theta_2, \theta_3, \theta_4$.

Q3 : Calculer la hauteur maximale d'étude de la roche par rapport au sol. Le cahier des charges demande une hauteur maximale d'étude de la roche par rapport au sol de $1,35 \pm 0.05$ m, conclure quand aux performances obtenues.

Partie A2 - Détermination des caractéristiques mécaniques de l'actionneur 2: (7,5 pts)

Pour cette partie, on s'intéresse à la détermination des caractéristiques mécaniques de l'actionneur 2 en utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique, lors d'un changement de position du bras articulé qui l'amène de la position P_h à la position P_v . ATTENTION : Seuls θ_2 et θ_4 sont libres. 4+5 reste toujours horizontal par rapport au sol. θ_1 et θ_3 restent nuls. Spirit est immobile par rapport au sol.

Q4 : Effectuer le graphe des liaisons du système étudié puis ajouter les actions mécaniques appliquées sur le système.

Q5 : Dessiner deux schémas permettant de visualiser dans le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ les solides 2, 3 et 45 ainsi que leurs centre de gravité respectifs dans les positions particulières P_h et P_v . Définir la relation entre θ_2 et θ_4 permettant de maintenir l'horizontalité de 45 par rapport au sol lorsque θ_1 et θ_3 restent nuls.

Q6 : Déterminer le moment dynamique en O_1 du solide 2 dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en projection sur l'axe $\vec{y}_1, \overrightarrow{\delta_{O_1,2/0}} \cdot \vec{y}_1$

Q7 : Déterminer le moment dynamique en O_1 du solide 3 dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en projection sur l'axe $\vec{y}_1, \overrightarrow{\delta_{O_1,3/0}} \cdot \vec{y}_1$

Q8 : Déterminer le moment dynamique en O_1 du solide 45 dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en projection sur l'axe $\vec{y}_1, \overrightarrow{\delta_{O_1,45/0}} \cdot \vec{y}_1$.

Q9 : Isoler l'ensemble $E=2+3+4+5$ et appliquer le théorème du moment dynamique sur cet ensemble au point O_1 et en projection sur l'axe \vec{y}_1 .

En déduire le couple moteur $C_{mot,1 \rightarrow 2}$ à fournir par le moteur 2 en fonction de θ_2 et de ses dérivées. Calculer la valeur maximale de ce couple pour une vitesse angulaire constante de 9 tr/min.

Partie A3 - Détermination des caractéristiques mécaniques de l'actionneur 4: (4 pts)

Pour cette partie, on considère que le bras articulé est à la position initiale P_v et que le solide 4+5 est en position horizontale par rapport au sol. On souhaite désormais déterminer les caractéristiques mécaniques de l'actionneur 4 pour que 4+5 passe de la position horizontale à la position verticale. Seul θ_4 est non nul. Spirit est toujours immobile par rapport au sol.

Q10 : Proposer une démarche permettant de calculer le couple moteur $C_{mot,3 \rightarrow 4}$ en utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique (choisir le(s) sous ensemble(s) adéquat(s) à isoler, le(s) définir clairement et identifier le(s) équation(s) scalaire(s) à utiliser)

Q11 : Déterminer l'expression littérale du couple moteur $C_{mot,3 \rightarrow 4}$ puis calculer la valeur maximale de ce couple pour une vitesse angulaire constante de 5 tr/min.

PARTIE B - ETUDE DE LA MOTORISATION DES ROUES DU ROBOT SPIRIT (5 pts)

Pour cette partie, on souhaite déterminer le couple moteur maximal admissible de chacun des motoréducteurs électriques asservis, pilotés en couple, qui équipent chaque roue du véhicule en utilisant le Théorème de l'Energie Cinétique. Ce couple maximal admissible correspond au couple maximal à ne pas dépasser pour qu'il n'y ait pas glissement des roues sur le sol, au démarrage, lors de la mise en mouvement du robot Spirit en translation rectiligne à partir de la position initiale arrêtée.

On fait les hypothèses d'une synchronisation « parfaite » des six moteurs, d'une répartition de la masse du robot identique sur les six roues ainsi qu'une symétrie du système, ce qui permet de ne travailler que sur une seule roue et d'adopter la **modélisation simplifiée** présentée **Figure 3**.

Modélisation cinématique, paramétrage et données massiques:

- Le corps du robot Spirit est repéré 0. On lui attache un repère $\mathcal{R}_0 = (A_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. La chaîne cinématique est composée d'un moteur, qui exerce un couple moteur $C_{mot \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_0$, d'un réducteur simple à deux étages et de la roue en bout de chaîne.
- La liaison entre l'arbre 1, d'inertie I_1 par rapport à l'axe (A_1, \vec{x}_0) , et le corps du robot est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (A_1, \vec{x}_0) . On attache au solide 1 le repère $\mathcal{R}_1 = (A_1, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, on pose $\alpha_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- La liaison entre l'arbre 2, d'inertie I_2 par rapport à l'axe (A_2, \vec{x}_0) , et le corps du robot est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (A_2, \vec{x}_0) . On attache au solide 2 le repère $\mathcal{R}_2 = (A_2, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, on pose $\alpha_2 = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$.
- La liaison entre le solide 3, d'inertie I_3 par rapport à l'axe (A_3, \vec{x}_0) , et le corps du robot est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe (A_3, \vec{x}_0) . On attache au solide 3 le repère $\mathcal{R}_3 = (A_3, \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, on pose $\alpha_3 = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$. L'action du sol sur la roue peut être modélisée par

$$\text{le torseur } \{F(\text{sol} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\text{sol} \rightarrow 3}} \\ -C_r \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{A_4}.$$

- Les liaisons entre les solides 1, 2 et 3 se font par des engrenages extérieurs supposés parfaits. On pose r_1 et r_2 , rapports de réductions, tels que $r_1 = -\dot{\alpha}_1 / \dot{\alpha}_2$ et $r_2 = -\dot{\alpha}_2 / \dot{\alpha}_3$

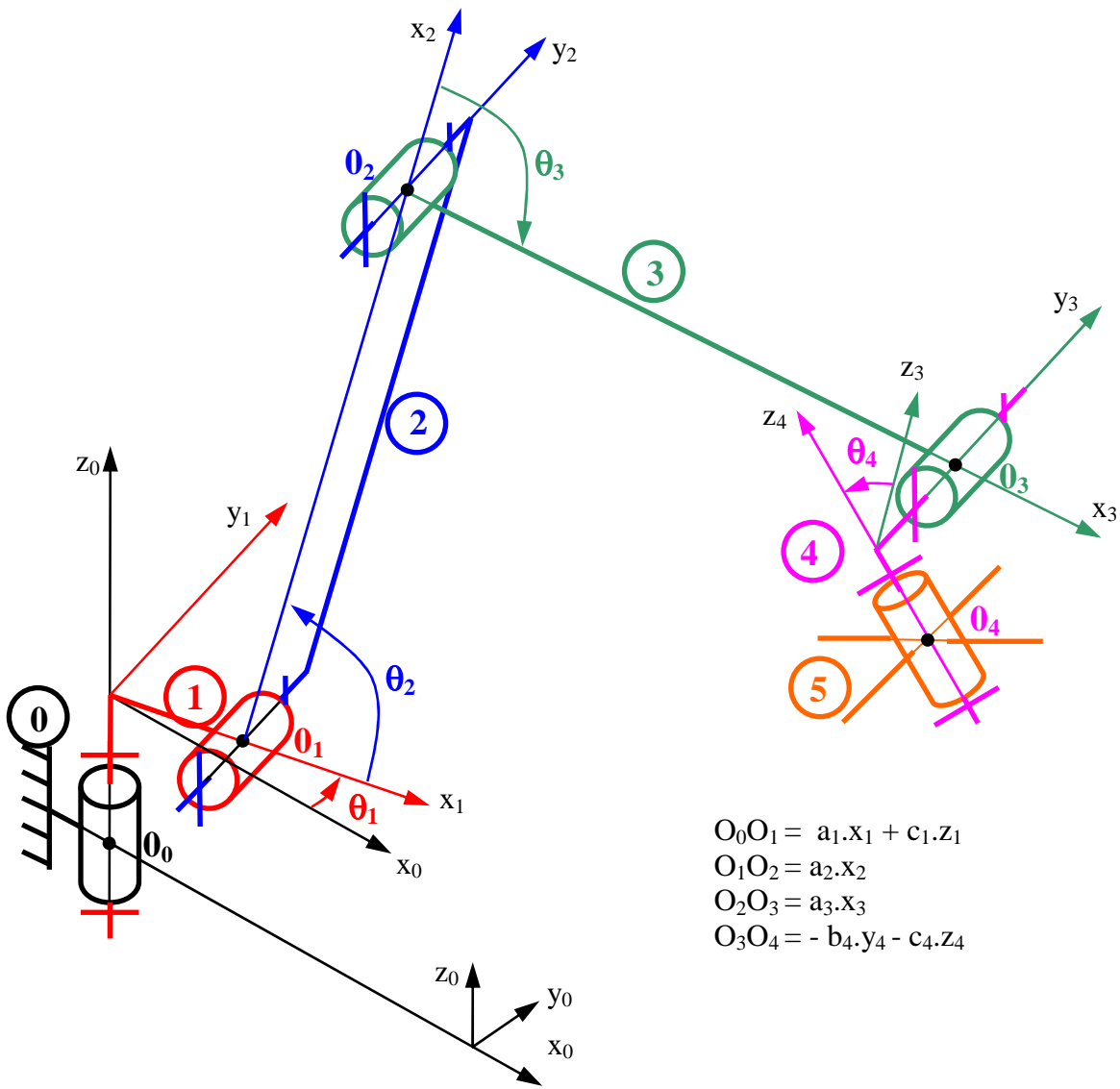
Q12 : Proposer une démarche permettant d'appliquer le Théorème de l'Energie Cinétique à l'ensemble du système $E = 1+2+3$

Q13 : Calculer l'énergie cinétique galiléenne $E_c(E/0)$ de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = (O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction de I_1, I_2, I_3, r_1, r_2 et $\dot{\alpha}_1$.

Q14 : Calculer la somme des puissances galiléennes des actions mécaniques extérieures au système E ainsi que la puissance des actions mécaniques intérieures au système E .

Q15 : En déduire l'expression du couple moteur $C_{mot \rightarrow 1}$.

Q16 : Proposer une démarche ainsi que le(s) modèle(s) utile(s) pour déterminer les composantes du torseur $\{F(sol \rightarrow 3)\}$ à la limite du glissement en fonction des données connues du problème et en posant, si besoin, les paramètres manquants. On ne fera aucun calcul.



$$\begin{aligned}
 O_0O_1 &= a_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot z_1 \\
 O_1O_2 &= a_2 \cdot x_2 \\
 O_2O_3 &= a_3 \cdot x_3 \\
 O_3O_4 &= -b_4 \cdot y_4 - c_4 \cdot z_4
 \end{aligned}$$

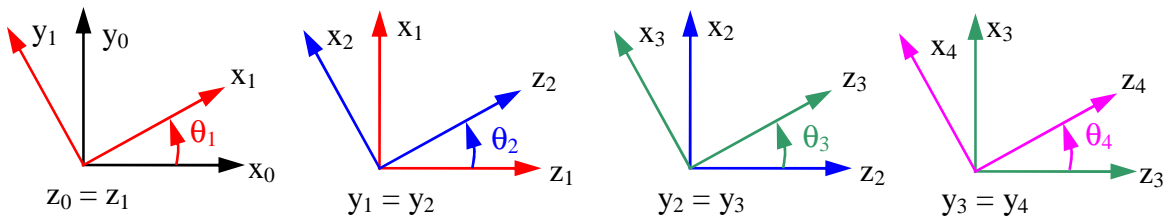


Figure 2 : Modélisation simplifiée du bras articulé

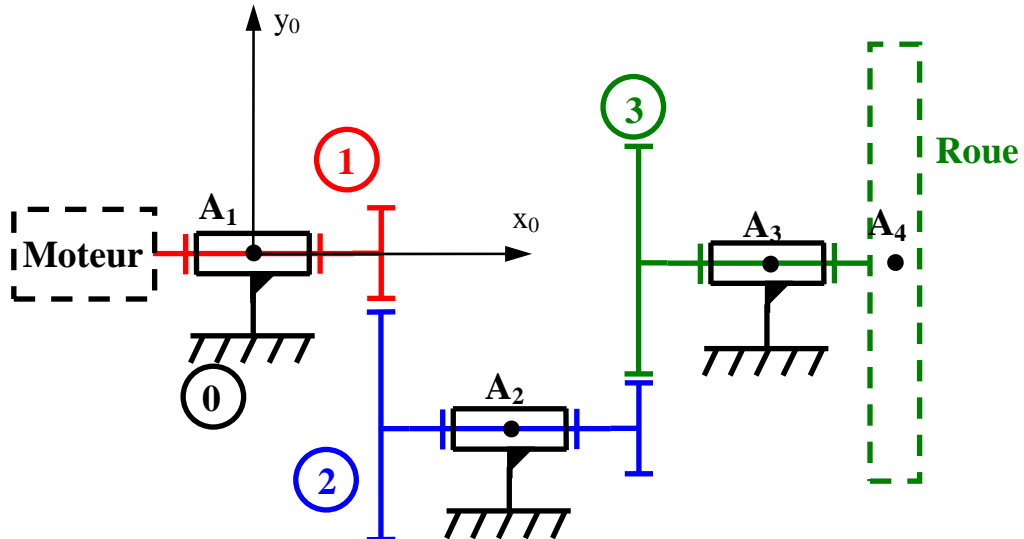


Figure 3 : Modélisation simplifiée de la chaîne cinématique roue/motoréducteur.

Formulaire Mécanique du Solide

Torseur en un point A :

$$[T]_{A,B} = \left[\begin{array}{c} \vec{R} = \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \\ \mathcal{B} \end{array} \right]_A, \quad \vec{M}_A = \left[\begin{array}{c} L \\ M \\ N \end{array} \right]_A \quad \text{avec} \quad \vec{M}_{A[T]} = \vec{M}_{B[T]} + A\vec{B} \wedge \vec{R}_{[T]}$$

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$\left[\begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \\ \vec{V}_{(A \in S / \mathcal{R})} \end{array} \right]_A \quad \text{avec} \quad \vec{V}_{(A \in S / \mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S / \mathcal{R})} + A\vec{B} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}_{(A \in S_2 / S_0)} = \vec{V}_{(A \in S_2 / S_1)} + \vec{V}_{(A \in S_1 / S_0)}$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{u} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d}{dt} \vec{u} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\left[\vec{F}_{Ext/S} \right]_A = \left[\mathcal{D}_{(S/\mathcal{R})} \right]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{[Ext/S]} = m\vec{\Gamma}_{(G \in S / \mathcal{R})} \\ \vec{M}_{A[Ext/S]} = \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} \right)_{\mathcal{R}} + m\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G \in S / \mathcal{R})}$$

où :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \left[I_{A,B}(S) \right] \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m A\vec{G} \wedge \vec{V}_{(A \in S / \mathcal{R})} \quad \text{avec} \quad A \in S$$

et

$$\left[I_{A,B}(S) \right] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ \int_S (z^2 + x^2) dm & -\int_S yz dm & \\ & & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

Théorème de Huyghens

$$\left[I_{A,B}(S) \right] = \left[I_{G,B}(S) \right] + \left[I_{A,B}(G; m(S)) \right]$$

Théorème de l'Energie cinétique :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{(S/\mathcal{R})} = \mathcal{P}_{(ext/S)} = \left[\vec{R}_{[ext/S]}, \vec{M}_{A[ext/S]} \right] \cdot \left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}, \vec{V}_{(A \in S / \mathcal{R})} \right]$$

$$\text{avec :} \quad \mathcal{E}_{(S/\mathcal{R})} = \frac{1}{2} m \vec{V}_{(G \in S)}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \left(\left[I_{G,B}(S) \right] \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \right)$$