

## Examen de Mécanique du Solide 2 (I3ICMG20)

Durée 2h30' aucun document autorisé

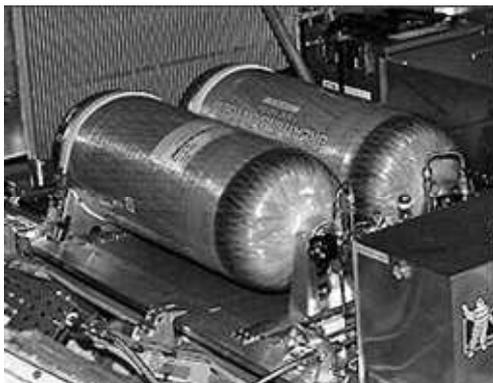
Janvier 2010

Lors de la correction, une attention particulière sera portée aux démarches présentées par l'étudiant pour l'application des lois fondamentales.

Les 5 questions de l'épreuve sont indépendantes.

### Green Taxiing : le roulage autonome écologique

Les avions de ligne monocouloir qui effectuent de courts trajets (comme par exemple Toulouse/Paris) passent plus d'un sixième de leur vie (c'est-à-dire 10 000 heures) à rouler entre le parking et la piste. Durant cette phase de roulage, les avions utilisent leurs réacteurs qui ne sont pas adaptés à cette fonction et qui engendrent donc une pollution sonore et gazeuse considérable. Par ailleurs, les avions ne pouvant pas faire marche arrière doivent faire appel à un tracteur pour le repoussage lors du départ de l'aire de parking. Pour éviter ces inconvénients, les aviateurs étudient des solutions de **roulage autonome** pour des avions court-courrier plus économiques et plus respectueux de l'environnement<sup>1</sup>. Elles consistent à intégrer dans le train d'atterrissage un ou plusieurs moteurs électriques qui pourraient être alimentés par une pile à combustible.



Pile à combustible testée  
comme source de puissance électrique  
sur un Airbus A320 (Février 2009)



Démonstrateur du concept  
de roulage autonome sur Boeing B757 (Avril 2008)  
et projet d'intégration dans la roue

La présente étude a pour objet de vérifier si la seule motorisation des roues avant est suffisante pour assurer la traction de l'avion dans tous les cas de roulage. En particulier, on cherche à vérifier les deux exigences suivantes :

**Exigence E1.** Assurer la motricité à une vitesse nominale de 40 km/h avec un vent de face de 30 km/h, sur une pente montante de 2°.

**Exigence E2.** Atteindre la vitesse nominale de 40 km/h en moins de 20 s sur pente nulle, sans vent relatif et sur piste sèche.

<sup>1</sup> Un doctorat en convention CIFRE entre Messier Bugatti (groupe Safran) et l'Institut Clément Ader (Département de Génie Mécanique) a démarré en Septembre 2009 sur ce sujet

## Modélisation

Le sol présente une pente  $\alpha$  telle que  $(-5^\circ < \alpha < 5^\circ)$ . Le repère  $\mathcal{R}_0$  est associé au sol et est supposé Galiléen. Par souci de simplicité, on considère que l'avion est constitué de 3 solides rigides :

- La cellule (1) associée au repère  $\mathcal{R}_1$ , de masse  $M$  et de centre d'inertie  $G$  tel que  $O\vec{G} = x.\vec{x}_1 + h.\vec{y}_1$  avec  $x$  variable et  $h$  constante. On considère que l'avion est soumis à une action aérodynamique résistante engendrée par le vent relatif. Cette action s'appliquant en  $G$  est de la forme  $\vec{F}_{a/1} = -k_1(\dot{x} - v_0)^2 \vec{x}_1$  où  $k_1$  est caractéristique de l'avion et où  $v_0$  est la vitesse du vent selon la direction  $\vec{x}_1$ .
- L'ensemble (2) des 2 roues du train d'atterrissage avant, associé au repère  $\mathcal{R}_2$ , assimilé à un solide unique de masse  $M_2$ , de centre d'inertie  $A$  ( $A\vec{G}.\vec{x}_1 = -L$ ), de moment d'inertie  $I_{A\vec{z}} = J_2$ . Chacune des 2 roues de masse  $m_2$ , de centre d'inertie respectif  $A_1$  et  $A_2$  tels que  $AA_1 = -AA_2 = e\vec{z}_1$  est considérée comme un cylindre de révolution d'axe  $A\vec{z}_1$  et de matrice d'inertie

$$[I_{A_1, B_1}(\text{roue1})] = [I_{A_2, B_1}(\text{roue2})] = \begin{bmatrix} J_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2z} \end{bmatrix}.$$

L'ensemble (2) est en liaison pivot motorisée, d'axe  $A\vec{z}$ , de paramètre  $\theta_2$  avec la cellule 1. Le moteur de roulage autonome développe un couple  $\vec{C}_{1/2} = -C_m \vec{z}$ . L'ensemble (2), assimilé à un cylindre de rayon  $R_2$  est en contact ponctuel avec frottement en  $I_2$  avec le sol. On modélise la résistance au roulage par le couple  $\vec{C}_{I_2}(0/2) = k_2 \|\vec{N}_2\| \vec{z}$  où  $\vec{N}_2$  est la composante normale de l'action de contact en  $I_2$  du sol sur l'ensemble (2). La valeur numérique de  $k_2$  est très faible devant  $L$  et  $l$ .

- L'ensemble (3) des 4 roues du train d'atterrissage principal, associé au repère  $\mathcal{R}_3$  et assimilé à un solide unique de masse  $M_3$ , de centre d'inertie  $B$  ( $B\vec{G}.\vec{x}_1 = l$ ), de moment d'inertie  $I_{B\vec{z}} = J_3$ . L'ensemble (3) est en liaison pivot parfaite d'axe  $B\vec{z}$ , de paramètre  $\theta_3$  avec la cellule (1). Les roues principales (3), assimilées à un cylindre de rayon  $R_3$  sont en contact ponctuel avec frottement en  $I_3$  avec le sol. On modélise la résistance au roulage par le couple  $\vec{C}_{I_3}(0/3) = k_3 \|\vec{N}_3\| \vec{z}$  où  $\vec{N}_3$  est la composante normale de l'action de contact en  $I_3$  du sol sur l'ensemble (3). La valeur numérique de  $k_3$  est très faible devant  $L$  et  $l$ .

### Partie 1. Centrage longitudinal de l'avion (barème indicatif 1.5 point + 0.5 bonus)

Pour qu'un avion soit stable et pilotable selon son axe de tangage (cabrer/piquer), il faut impérativement que son centre d'inertie  $G$  soit correctement situé, en avant du foyer moyen  $F$  des forces aérodynamiques. C'est dire qu'il vérifie la condition  $a < F\vec{G}.\vec{x}_1 < b$ . L'objet de cette question est de définir comment la charge marchande (les bagages des passagers et le fret) doit être placée afin de satisfaire cette exigence.

On considère que l'avion sans la charge marchande a une masse  $M_v$  et que son centre d'inertie  $G_v$  est tel que  $F\vec{G}_v = c.\vec{x}_1$ . Le centre d'inertie  $G_c$  de la charge marchande de masse  $M_c$  est à situer à une distance  $d$  du point  $F$  telle que  $F\vec{G}_c = d.\vec{x}_1$ . On considère pour simplifier que  $F$ ,  $G_c$ ,  $G_v$ , et  $G$  sont alignés sur l'axe  $\vec{x}_1$ .

Question 1.a. Déterminer la masse totale  $M_t$  de l'avion chargé.

Question 1.b. Déterminer la condition que doit vérifier  $d$  lors du chargement de l'avion pour que le centrage longitudinal de l'avion soit assuré.

Question bonus 1. Calculer la valeur numérique de  $d$  à partir des données du tableau 1.

## **Partie 2. Matrice d'inertie de l'ensemble des roues avant** (barème indicatif 2.5 points)

On cherche ici à calculer la matrice d'inertie de l'ensemble (2). Durant les phases de conception, le moment d'inertie  $I_{A\bar{z}}(2)$  est nécessaire pour évaluer le système de roulage autonome, alors que le moment d'inertie  $I_{A\bar{y}^2}(2)$  sert pour l'étude du système d'orientation (dirigeabilité lors du roulage).

Question 2.a. Expliquer avec précision pourquoi la matrice d'inertie de chaque roue est diagonale et indiquer si elles existent les relations liant  $J_{2x}$ ,  $J_{2y}$  et  $J_{2z}$ .

Question 2.b. Calculer la matrice d'inertie  $[I_{A,B_1}(2)]$  de l'ensemble (2) et critiquer les résultats obtenus.

## **Partie 3. Roulage autonome à vitesse constante** (barème indicatif 5 points + 1 bonus)

On cherche ici à calculer quelles sont les limites de motricité lorsque l'avion roule en ligne droite à vitesse constante. On considère pour cette question que l'avion roule à vitesse constante  $\dot{x} = v$  et  $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = cte$ . On suppose que toutes les quantités de masse et de géométrie sont connues. Les seules quantités inconnues sont les efforts (hormis le poids), les variables d'espace ( $x$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$ ), la pente ( $\alpha$ ) et la vitesse du vent  $v_0$ .

Question 3.a. On néglige pour simplifier les effets de  $M_2$  et  $M_3$  ( $M_2 = M_3 = 0$ ) mais pas les effets de  $J_2$  et de  $J_3$ . Ecrire et expliciter les équations du PFD pour l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ . On choisira d'exprimer les moments au point  $I_2$ . Appliquer ensuite le théorème du moment dynamique au seul ensemble (3) pour la seule composante de moment en  $B$  selon l'axe  $\bar{z}$ .

Question 3.b. Exprimer la condition sur les efforts de contact traduisant d'une part l'existence du contact et d'autre part le non glissement en  $I_2$ .

Question 3.c. A partir des résultats des deux questions précédentes, déduire la condition que doit vérifier le coefficient de frottement roues/sol pour qu'il y ait non glissement en  $I_2$ . (sous la forme demandée, cette condition ne fait plus apparaître les efforts inconnus). On suggère d'exprimer  $N_2$  puis d'exprimer  $T_2$  en fonction de  $N_2$  avant d'introduire la condition de non glissement. On pourra pour simplifier remarquer que  $k_2$  et  $k_3$  sont petits devant  $l$  et  $L$ .

Question 3.d. Donner la procédure et la mettre en oeuvre pour obtenir l'expression du couple moteur  $C_m$  en fonction de  $T_2$  et  $N_2$  supposées connues (par exemple à l'issue de la question précédente). Ce résultat servirait à dimensionner le moteur vis-à-vis de l'exigence E1.

Question bonus 3. Vérifier numériquement si l'exigence E1 peut être vérifiée sur piste sèche ( $\mu=0.7$ ) et sur piste glacée ( $\mu=0.2$ ).

## **Partie 4. Roulage autonome en phase d'accélération** (barème indicatif 8 pts + 1.5 bonus)

On cherche ici à calculer quelle est l'accélération maximale permise par le système de roulage autonome. On néglige par souci de simplicité l'effort aérodynamique dû au vent relatif et on suppose que la pente  $\alpha$  est nulle. On considère que le couple  $C_m$  engendre une accélération constante  $\ddot{x} = \Gamma$ . Les seules quantités inconnues sont les efforts (hormis le poids) et les variables d'espace ( $x$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$ ).

Question 4.a. Donner les conditions cinématiques de roulement sans glissement en  $I_2$  et en  $I_3$ .

Question 4.b. On néglige pour simplifier les effets de  $M_2$  et  $M_3$  mais pas les effets de  $J_2$  et de  $J_3$ . Ecrire et expliciter les équations du PFD pour l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ . On choisira d'exprimer les moments au point  $I_2$ . On détaillera les expressions des torseurs cinématique, cinétique, dynamique et des efforts extérieurs requis pour cette question. Ecrire également pour l'ensemble (2) puis pour l'ensemble (3) l'équation de moment du PFD en projection sur l'axe de rotation  $\bar{z}$ . Pour cette question 4.b, la notation prendra en compte la justification précise des conditions permettant d'écrire les égalités.

Question 4.c. Exprimer la condition sur les efforts traduisant le non glissement au point de contact  $I_2$ .

Question 4.d. En combinant les résultats précédents, exprimer l'accélération maximale permise par la motorisation de la roue avant pour maintenir le contact et pour ne pas glisser en  $I_2$ . En déduire la condition sur le coefficient de frottement  $\mu$  pour produire une accélération donnée  $\Gamma$ .

**Question bonus 4.** Vérifier numériquement si l'exigence E2 peut être vérifiée sur piste sèche ( $\mu=0.7$ ) et sur piste glacée ( $\mu=0.2$ ). Dans le cas d'une réponse négative, calculer le temps mis pour atteindre les 40 km/h sans glisser en  $I_2$  sur piste glacée.

### Partie 5. Calcul du couple moteur (barème indicatif 3 points)

**Question 5.a.** Par application du théorème de l'énergie cinétique, donner l'expression du couple moteur  $C_m$  à produire en fonction de l'accélération ( $\ddot{x}$ ) et de la vitesse ( $\dot{x}$ ) de l'avion, de la pente ( $\alpha$ ) et de la vitesse du vent ( $v_0$ ). On supposera implicitement qu'il n'y a pas de glissement aux points de contact et on ne cherchera pas à expliciter  $N_2$  et  $N_3$  dans le cadre de cette épreuve. Exprimer la puissance mécanique à fournir par le moteur de roulage autonome.

**Question bonus 5.** Retrouver l'expression du couple moteur de la question 4.e en utilisant les expressions de  $N_2$  et  $N_3$  tirées de la question 4.

### FORMULAIRE de Mécanique du solide

Torseur en un point  $\mathcal{A}$  :

$$[T]_{A,B} = \left[ \begin{array}{c} \vec{R} = \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \\ \vec{M}_A = \begin{array}{c} L \\ M \\ N \end{array} \end{array} \right]_{\mathcal{B}} \text{ avec } \vec{M}_{A[T]} = \vec{M}_{B[T]} + A\vec{B} \wedge \vec{R}_{[T]}$$

Torseur cinématique en un point  $\mathcal{A}$  du mouvement d'un solide rigide :

$$[C_{S/\mathcal{R}}] = \left[ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \\ \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \end{array} \right]_{\mathcal{A}} \text{ avec } \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S/\mathcal{R})} + A\vec{B} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}_{(A \in S_2/S_0)} = \vec{V}_{(A \in S_2/S_1)} + \vec{V}_{(A \in S_1/S_0)}$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$[F_{Ext/S}]_A = [D^{(S/\mathcal{R})}]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{[F_{Ext/S}]} = m \vec{\Gamma}_{(G \in S/\mathcal{R})} \\ \vec{M}_{A[F_{Ext/S}]} = \vec{\delta}_A^{(S/\mathcal{R})} \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\delta}_A^{(S/\mathcal{R})} = \left( \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A^{(S/\mathcal{R})} \right)_{\mathcal{R}} + m \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})}$$

où

$$\vec{\sigma}_A^{(S/\mathcal{R})} = [I_{A,B}^{(S)}] \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m A\vec{G} \wedge \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \quad \text{avec } A \in S$$

et

$$[I_{A,B}^{(S)}] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm & \\ & & \int_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

Théorème de Huygens

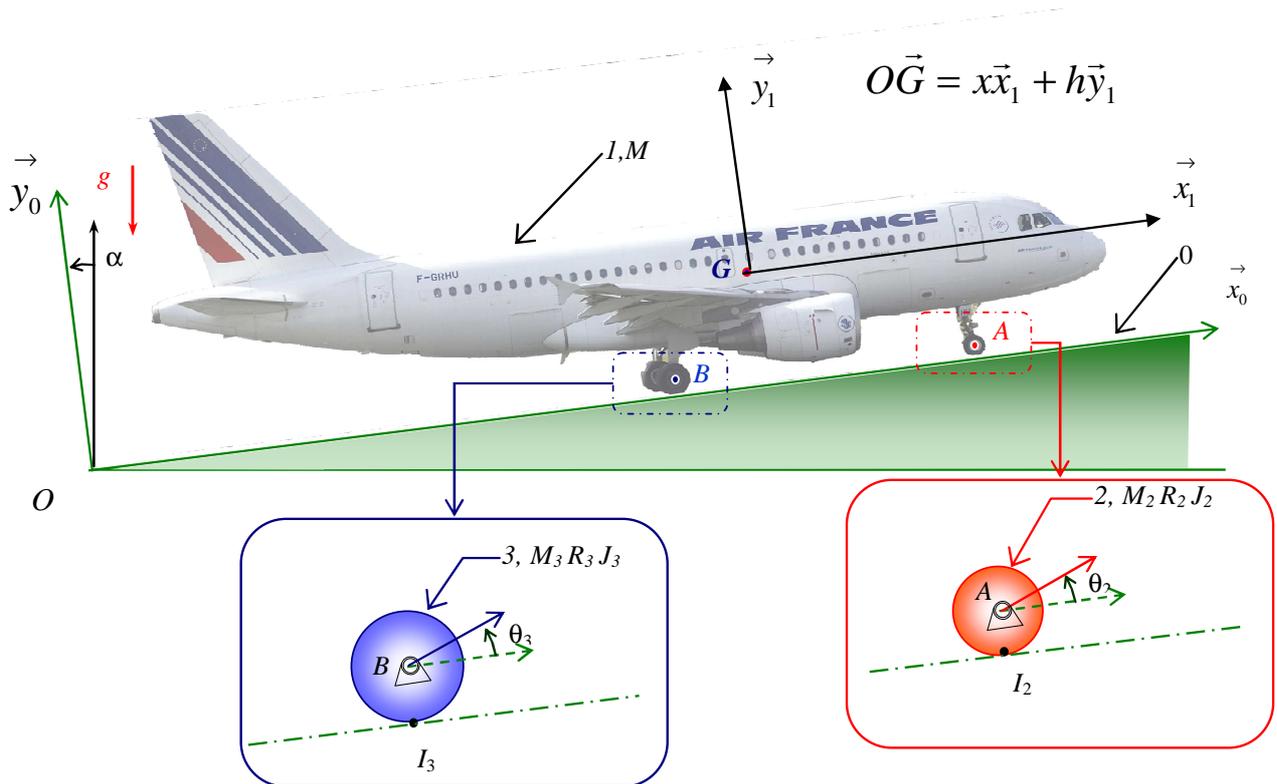
$$[I_{A,B}^{(S)}] = [I_{G,B}^{(S)}] + [I_{A,B}^{(G,m(S))}]$$

Puissance développée

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left[ \vec{R}_{[F_{Ext/S}]} \quad \vec{M}_{A[F_{Ext/S}]} \right]_{\mathcal{A}} \cdot \left[ \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \right]_{\mathcal{A}}$$



Mauvais centrage !



Masse de la cellule	$M = 39000 \text{ kg}$	Accélération de la pesanteur	$g = 10 \text{ m/s}^2$
Masse sans charge marchande	$M_v = 42000 \text{ kg}$	Masse de la charge marchande	$M_c = 15000 \text{ kg}$
Contrainte de centrage	$a = 1 \text{ m}$ $b = 1.5 \text{ m}$	Position du centre d'inertie $G_v$	$c = 1.4 \text{ m}$
Hauteur du centre de gravité	$h = 2 \text{ m}$	Facteur aérodynamique	$k_1 = 10 \text{ kg/m}$
Distance BG selon l'axe $\vec{x}_1$	$l = 1.2 \text{ m}$	Distance AG selon l'axe $\vec{x}_1$	$L = 11 \text{ m}$
Rayon des roues avant	$R_2 = 0.35 \text{ m}$	Rayon des roues arrière	$R_3 = 0.6 \text{ m}$
Moment d'inertie de l'ensemble (2) selon l'axe $\vec{z}$	$J_2 = 10 \text{ kg m}^2$	Moment d'inertie de l'ensemble (3) selon l'axe $\vec{z}$	$J_3 = 40 \text{ kg m}^2$
Facteur de résistance au roulement des roues avant	$k_2 = 0.001 \text{ m}$	Facteur de résistance au roulement des roues arrière	$k_3 = 0.001 \text{ m}$

Tableau 1. Données numériques