

Partiel de Mécanique du Solide 2

Durée 2h30 aucun document autorisé

Janvier 2011

Lors de la correction, une attention particulière sera portée à la critique et aux remarques émises par l'étudiant sur l'homogénéité et la vraisemblance de ses résultats.

DIMENSIONNEMENT de la MOTORISATION D'UN MANEGE



Ce nouveau manège, développé récemment, procure aux passagers de nouvelles sensations dues à des séquences variées de mouvements.

L'installation est composée d'une structure métallique d'environ 12 m de haut avec deux bras mobiles. Les passagers s'assoient sur 39 sièges en mousse disposés sur une plate-forme tournante, au design novateur et sont parfaitement maintenus par un harnais. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, la nacelle tourne autour de son axe, le bras principal (bras 1) et le bras secondaire (bras 2), liés l'un à l'autre au début du cycle, commencent à tourner.

Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les deux bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par un ordinateur.

L'accélération de la pesanteur \vec{g} est telle que $\vec{g} = -g \vec{y}_0$. $\mathcal{R}_0(O; x_0, y_0, z_0)$ sera considéré comme un repère galiléen.

Le manège, schématisé sur la **figure 1**, comporte :

- le bras principal 1, assimilé à une barre AO_1O_2 . On pose $O_1\vec{O}_2 = -l_1\vec{y}_1$,
 - en liaison pivot sans frottement par rapport au bâti 0 d'axe $O_1\vec{z}_0$ caractérisé par le paramètre α .
 - un moteur M_1 dont le corps est solidaire du bâti 0 et exerce sur le bras secondaire 1 un couple moteur noté $C_{m1}\vec{z}_1$.

- le bras secondaire 2, assimilé à une barre BO_2O_3 . On pose $O_2\vec{O}_3 = -l_2\vec{y}_2$.
 - en liaison pivot sans frottement par rapport au bras principal 1 d'axe $O_2\vec{z}_1$ caractérisé par le paramètre β .
 - un moteur M_2 dont le corps est solidaire du bras principal 1 et exerce sur le bras secondaire 2 un couple moteur noté $C_{m2}\vec{z}_2$.
 - La nacelle 3, assimilée à un disque de centre O_3 et de rayon R
 - en liaison pivot sans frottement par rapport au bras secondaire 2 d'axe $O_3\vec{y}_2$ caractérisé par le paramètre φ .
 - un moteur M_3 dont le corps est solidaire du bras 2 exerce sur la nacelle 3 un couple moteur noté $C_{m3}\vec{y}_3$.
- On s'intéresse plus particulièrement à un passager considéré comme un point matériel P tel que $O_3\vec{P} = -R \vec{z}_3$.

Le travail abordé dans ce problème est représentatif de l'activité qui conduirait à évaluer les sensations ressenties par les passagers et à spécifier les moteurs M_2 et M_3 .

Sensations ressenties par le passager

1. Exprimer les vitesses instantanées de rotation $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{2/0}$, $\vec{\Omega}_{3/0}$ de chacun des solides 1, 2 et 3 dans leurs mouvements respectifs par rapport au bâti 0.
2. Déterminer l'expression générale de la vitesse du point P associé au passager par rapport au bâti 0, notée $\vec{V}_{P,3/0}$, en projection sur la base $\mathcal{B}_2(x_2, y_2, z_2)$.
3. Donner l'équation vectorielle générale de l'accélération du point P du passager par rapport au bâti 0, notée $\vec{\Gamma}_{P,3/0}$, en projection sur la base $\mathcal{B}_2(x_2, y_2, z_2)$.
4. Le calcul des composantes de $\vec{\Gamma}_{P,3/0}$ à l'instant $t_I=19.8$ s a fourni les valeurs suivantes :

$$\vec{\Gamma}_{P,3/0} = \begin{matrix} 1,52 \text{ ms}^{-2} \\ 17,61 \text{ ms}^{-2} \\ 1,02 \text{ ms}^{-2} \end{matrix}_{\mathcal{B}_2}$$

Calculer le module de cette accélération. Exprimer cette accélération en nombre de « g » ($g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ étant l'accélération de la pesanteur). Qu'en pensez vous ?

5. Donner, à l'instant $t_I=19,8$ s, les valeurs numériques des projections du vecteur accélération dans le repère du passager. Conclure quant à l'effet de cette accélération sur le passager par rapport à son siège.

Détermination du couple du moteur M₃ d'entraînement de la nacelle

L'ensemble 3 en mouvement de rotation selon l'axe $O_3\vec{y}_2$ est assimilé à un solide rigide, de masse M_3 , constitué de :

- la nacelle proprement dite, ayant la forme d'un disque de centre d'inertie O_3 , de masse M et

$$\text{de matrice d'inertie } [I_{O_3, \mathcal{B}_3}(\text{nacelle})] = \begin{bmatrix} A_n & 0 & 0 \\ 0 & B_n & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{bmatrix},$$

- des occupants assimilés à un solide rigide unique de centre d'inertie C , de masse m , tel que

$$O_3\vec{C} = -r\vec{z}_3 \text{ et de matrice d'inertie en } C [I_{C, \mathcal{B}_3}(\text{occupants})] = \begin{bmatrix} A_o & 0 & 0 \\ 0 & B_o & 0 \\ 0 & 0 & C_o \end{bmatrix}$$

- Justifier rigoureusement la forme de la matrice d'inertie de la nacelle seule.
- Calculer les propriétés inertielles de l'ensemble $3 = \{\text{nacelle} + \text{occupants}\}$, à savoir la position du centre d'inertie G_3 dans $\mathcal{R}_3 = (O_3; \mathcal{B}_3)$, la masse globale M_3 , la matrice d'inertie $[I_{O_3, \mathcal{B}_3}(3)]$.
- Application numérique
 $A_n = 850 \text{ kgm}^2$ $B_n = 1680 \text{ kgm}^2$ $M = 1200 \text{ kg}$ $m = 630 \text{ kg}$ $r = 1.6 \text{ m}$
 $A_o = 190 \text{ kgm}^2$ $B_o = 2290 \text{ kgm}^2$ $C_o = 2000 \text{ kgm}^2$

On considère désormais comme connus la masse M_3 et :

$$[I_{O_3, \mathcal{B}_3}(3)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}; \quad O_3\vec{G}_3 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{matrix}_{\mathcal{B}_3}; \quad \vec{\Omega}_{3/0} = \begin{matrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{matrix}_{\mathcal{B}_3}; \quad \vec{V}_{O_3/0} = \begin{matrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{matrix}_{\mathcal{B}_3}$$

où les composantes des vitesses $\vec{\Omega}_{3/0}$ et $\vec{V}_{O_3/0}$ sont des fonctions du temps et des paramètres d'espace α , β et φ .

- Déterminer les composantes du moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_3(3/0)}$, relatif au mouvement du solide 3 par rapport au repère \mathcal{R}_0 , exprimé au point O_3 dans la base \mathcal{B}_3 .
- L'analyse des ordres de grandeur montre que les facteurs où apparaît le produit aM_3 dans les composantes du moment cinétique peuvent être négligés devant les autres facteurs des composantes de ce moment (également vrai pour les composantes du moment dynamique). Compte tenu de cette remarque, exprimer le moment dynamique $\vec{\delta}_{O_3(3/0)}$, relatif au mouvement du solide 3 par rapport au repère \mathcal{R}_0 , exprimé au point O_3 dans la base \mathcal{B}_3 .
- Exprimer le moment suivant l'axe $O_3\vec{y}_3$ du torseur $[F_{\text{ext}/3}]_{O_3}$ des efforts extérieurs appliqués au solide 3. On remarquera que la base \mathcal{B}_2 se déduit de la base \mathcal{B}_0 par une rotation d'angle $(\alpha+\beta)$ selon l'axe z_0 .
- Par application du théorème du moment dynamique, en déduire le couple C_{m3} que doit développer le moteur M_3 d'entraînement de la nacelle.

Détermination du couple du moteur M₂ d'entraînement du bras secondaire

On s'intéresse au cas de fonctionnement où la nacelle ne tourne pas ($\varphi=0$). De ce fait, on considère désormais que les solides 2 et 3 ne forment plus qu'un seul solide 2, de masse M_2 et de centre d'inertie G_2 tels que

$$[I_{G_2, \mathcal{B}_2}(2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}; \quad O_2\vec{G}_2 = \begin{matrix} 0 \\ k \\ 0 \end{matrix}_{\mathcal{B}_2}$$

On cherche à exprimer le couple C_{M2} que doit développer le moteur M_2 qui entraîne le bras secondaire.

- Exprimer l'énergie cinétique du solide 2 dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_0 .
- Exprimer la puissance des efforts extérieurs développés sur le solide 2 dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 .
- Quelle valeur donner à k par conception pour minimiser cette énergie et cette puissance ? Comment le concepteur peut-il satisfaire cette condition ?
- En tenant compte de la valeur de k déterminée à la question précédente, donner l'expression du couple moteur C_{m2} .
- Donner l'expression de la puissance développée par le moteur M_2 dans le mouvement du bras 2 par rapport au bras 1 (mouvement du rotor de M_2 par rapport au stator de M_2).

Détermination du couple du moteur M₁ d'entraînement du bras principal

On considère toujours que les solides 2 et 3 ne forment qu'un seul solide 2

- Donner la procédure à suivre et préciser les caractéristiques à demander au constructeur pour déterminer le couple moteur C_{m1} . Donner alors l'expression de ce couple dans le cas où vous avez toutes les caractéristiques demandées.

Formulaire Mécanique du Solide

Torseur en un point A :

$$[T]_{A,B} = \left[\vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B \quad \vec{M}_A = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}_A \right] \quad \text{avec} \quad \vec{M}_{A[T]} = \vec{M}_{B[T]} + A\vec{B} \wedge \vec{R}_{[T]}$$

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$[C_{S/\mathcal{R}}] = [\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}]_A \quad \text{avec} \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S/\mathcal{R})} + A\vec{B} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}_{(A \in S_2/S_0)} = \vec{V}_{(A \in S_2/S_1)} + \vec{V}_{(A \in S_1/S_0)}$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$[F_{Ext/S}]_A = [D(S/\mathcal{R})]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{[F_{Ext/S}]} = m \vec{\Gamma}_{(G \in S/\mathcal{R})} \\ \vec{M}_{A[F_{Ext/S}]} = \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \left(\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) \right)_{\mathcal{R}} + m \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})}$$

où :

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = [I_{A,B}(S)] \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m A\vec{G} \wedge \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \quad \text{avec} \quad A \in S$$

et

$$[I_{A,B}(S)] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ -\int_S xydm & \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm \\ -\int_S xzdm & -\int_S yzdm & \int_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

Théorème de Huygens

$$[I_{A,B}(S)] = [I_{G,B}(S)] + [I_{A,B}(G,m(S))]$$

Puissance développée

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left[\vec{R}_{[F_{Ext/S}]} \quad \vec{M}_{A[F_{Ext/S}]} \right]_A \cdot \left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \right]_A$$

Energie cinétique

$$E_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot ([I_{G,\cdot}(S)] \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}})$$

Théorème de l'Energie Cinétique

$$\left(\frac{dE_{S/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{Ext \dot{a} \Sigma/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{Int \dot{a} \Sigma/\mathcal{R}}$$

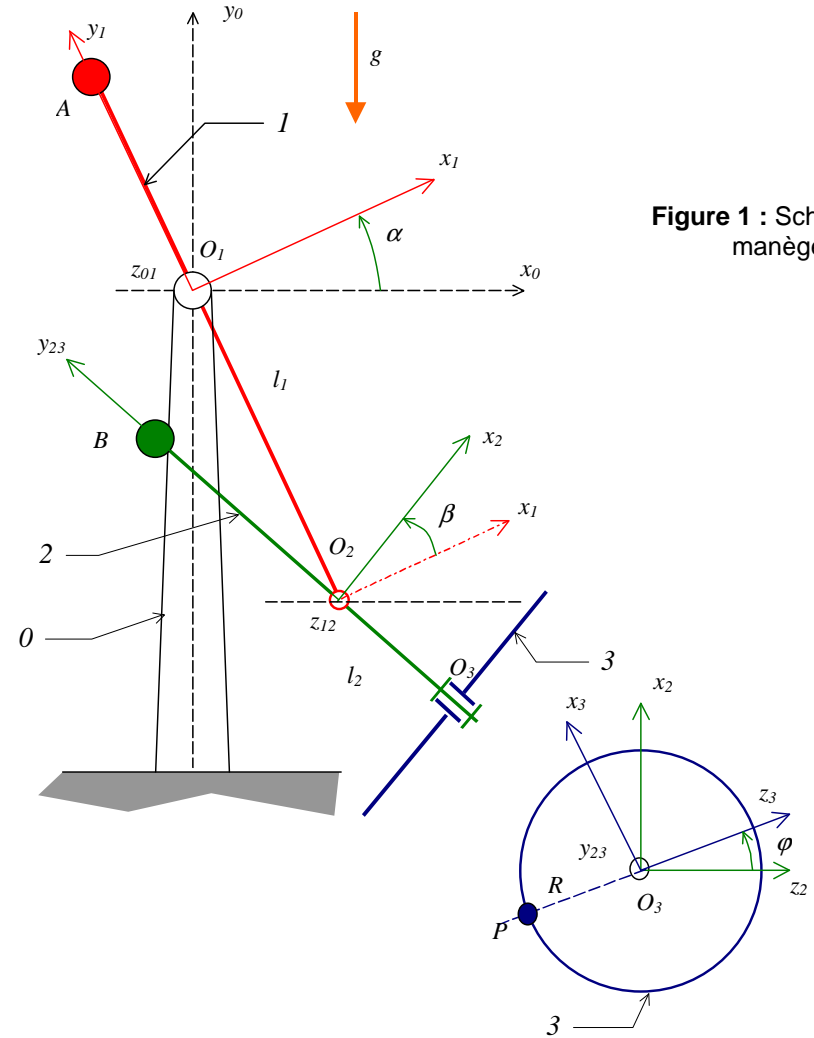


Figure 1 : Schéma du manège