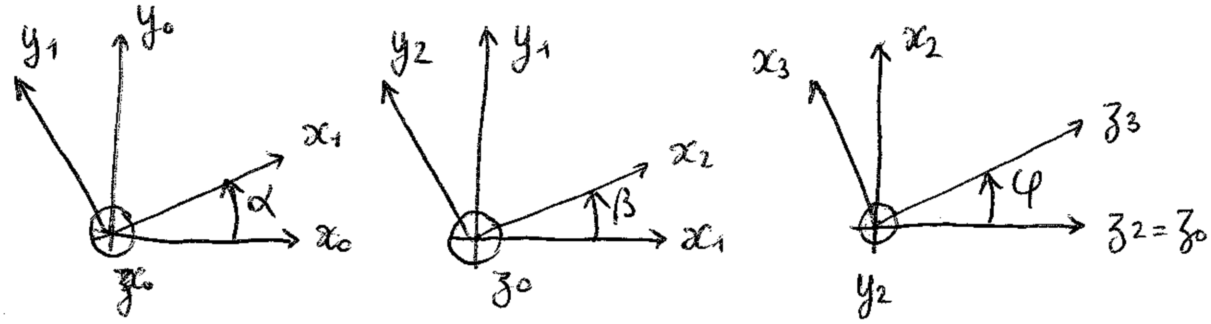


Partie I (4)

1. $\vec{\Omega}_{10} = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \qquad \vec{\Omega}_{20} = (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{z}_0 \qquad \vec{\Omega}_{30} = (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\,\vec{y}_2$ (1)

2. $$\vec{V}_{P,3/0} = \frac{d}{dt}\left(-\ell_1\vec{y}_1 - \ell_2\vec{y}_2 - R\vec{z}_3\right)$$
$$= +\ell_1\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 + \ell_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{x}_2 - R\left.\frac{d\vec{z}_3}{dt}\right|_0$$

$$\left.\frac{d\vec{z}_3}{dt}\right|_0 = \left\{(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\,\vec{y}_2\right\} \wedge \vec{z}_3 = (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\sin\varphi\,\vec{y}_2 + \dot{\varphi}\,\vec{x}_3$$

$$\vec{V}_{P,3/0} = \ell_1\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 + \ell_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{x}_2 - R(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\sin\varphi\,\vec{y}_2 - R\dot{\varphi}\,\vec{x}_3$$

$$\left|\begin{array}{l} \ell_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta}) - R\dot{\varphi}\cos\varphi + \ell_1\dot{\alpha}\cos\beta \\ -R(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\sin\varphi - \ell_1\dot{\alpha}\sin\beta \\ R\dot{\varphi}\sin\varphi \end{array}\right._{b_2}$$ (1)

3. $$\vec{\Gamma}_{P,3/0} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_{P,3/0}\right)$$

$$\vec{\Gamma}_{P,3/0} = \left|\begin{array}{l} \ell_2(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}) - R\ddot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\varphi}^2\sin\varphi + \ell_1\ddot{\alpha}\cos\beta - \ell_1\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta \\ \qquad + R(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\sin\varphi + \ell_1\dot{\alpha}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\sin\beta \\ -R(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\sin\varphi - R\dot{\varphi}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos\varphi - \ell_1\ddot{\alpha}\sin\beta - \ell_1\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta \\ \qquad + \ell_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2 - R(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\dot{\varphi}\cos\varphi + \ell_1(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\dot{\alpha}\cos\beta \\ R\ddot{\varphi}\sin\varphi + R\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{array}\right._{b_2}$$ (1)

4- $\|\vec{\Gamma}_{P,3/0}\| = 17{,}7 \ m\,s^{-2} \simeq 1{,}8\,g$ (0,5)

accelerations importantes

5- $\vec{\Gamma}_{P,3/0} = \begin{pmatrix} 1{,}52 \\ 17{,}61 \\ 1{,}02 \end{pmatrix}_{b_2}$ dans b_3 $\left| \begin{array}{l} 1{,}52\cos\varphi - 1{,}02\sin\varphi \\ 17{,}61 \\ 1{,}02\cos\varphi + 1{,}52\sin\varphi \end{array} \right._{b_3}$

(0,5)

l'acceleration est principalement dirigée suivant $\vec{y}_3$

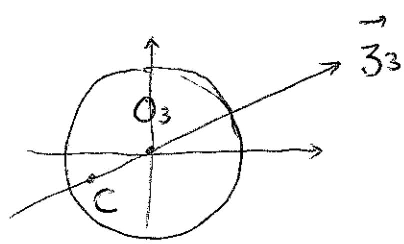
Difficile de conclure car on ne sait comment est positionné le passager.

Partie II (9)

6- La nacelle a une matrice en son centre d'inertie O_3 diagonale avec $A_n = B_n$. Elle peut être assimilée à un solide de revolution d'axe $O_3\vec{y}_3$ (1)

remarque : la matrice est identique dans b_2 et dans b_3

7- position de G_3 $\quad \vec{O_3G_3} \left| \begin{array}{l} x_{G_3} \\ y_{G_3} \\ z_{G_3} \end{array} \right.$



etant données les symetries

$x_{G_3} = 0 \quad y_{G_3} = 0$

$M_3 z_{G_3} = M \times 0 + m(-r) \qquad z_{G_3} = -\dfrac{m r}{(M+m)}$

masse de (3) : $M_3 = M + m$

matrice de (3) $\begin{pmatrix} A_n & 0 & 0 \\ 0 & B_n & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_0 + m r^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 + m r^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{pmatrix}$ (2)

$= \begin{pmatrix} A_n + A_0 + m r^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_n + B_0 + m r^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_n + C_0 \end{pmatrix}$

528

8. $\vec{O_3G_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ avec $a = 0,55\ m$

$M_3 = 1830\ kg$ (0,5)

$$[I_{O_3,b_3}] = \begin{pmatrix} 2652,8 & 0 & 0 \\ 0 & 5582,8 & 0 \\ 0 & 0 & 2850 \end{pmatrix}$$

9. $\vec{\sigma}_{O_3,3/0} = [I_{O_3,b_3}](\vec{\Omega_{30}}) + M_3\{\vec{O_3G_3} \wedge \vec{V_{O_3/0}}\}$

par définition. (1)

$$= \begin{pmatrix} A\omega_x \\ B\omega_y \\ C\omega_z \end{pmatrix} + M_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega_x + aV_yM_3 \\ B\omega_y - aV_x.M_3 \\ C\omega_z \end{pmatrix}_{b_3}$$

10. $\vec{\delta}_{O_3,3/0} = \dfrac{d\vec{\sigma}_{O_3,3/0}}{dt} + \underbrace{M_3\{\vec{V_{O_3/0}} \wedge \vec{V_{G_3/0}}\}}$

$$\vec{V}_{G_3/0} = \vec{V}_{O_3/0} + (\vec{\Omega}_{30} \wedge \vec{O_3G_3})$$

$$= \vec{V}_{O_3/0} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x - a\omega_y \\ V_y + a\omega_x \\ V_z \end{pmatrix}$$

aM_3 étant négligeable devant les autres termes, le produit $M_3\vec{V}_{O_3/0} \wedge \vec{V}_{G_3/0}$ ne fait intervenir que des termes négligeables

d'où $\vec{\delta}_{O_3,3/0} = \left.\dfrac{d\vec{\sigma}_{O_3,3/0}}{dt}\right|_0 = \begin{pmatrix} A\dot{\omega}_x \\ B\dot{\omega}_y \\ C\dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A\omega_x \\ B\omega_y \\ C\omega_z \end{pmatrix}$ (2)

$$= \begin{pmatrix} A\dot{\omega}_x + (C-B)\,\omega_y.\omega_z \\ B\dot{\omega}_y + (A-C)\,\omega_x\omega_z \\ C\dot{\omega}_z + (B-A)\,\omega_x\omega_y \end{pmatrix}_{b_3}$$

11_ On isole (3)

Bilan A.M ext
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{pivot en } O_3 \ 2\to 3 \text{ parfaite} & \left\{\begin{array}{c|c} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & 0 \\ Z_{23} & N_{23} \end{array}\right\}_{O_3, b_2} \\ \text{couple moteur} & C_{m3}\,\vec{y}_3 \\ \text{pesanteur en } G_3 & -M_3 g\,\vec{y}_0 \text{ en } G_3 \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{O_3G_3} \wedge -M_3 g\,\vec{y}_0 = -a\,\vec{z}_3 \wedge -M_3 g\left(\cos(\alpha+\beta)\,\vec{y}_2 + \sin(\alpha+\beta)\,\vec{x}_2\right)$$

$$= -aM_3 g\cos(\alpha+\beta)\,\vec{x}_3 + aM_3 g\sin(\alpha+\beta)\cos\varphi\,\vec{y}_3$$

$$\sum \overrightarrow{M}_{O_3\,ext\to 3}\cdot\vec{y}_3 = C_{m3} + aMg\sin(\alpha+\beta)\cos\varphi \qquad (1,5)$$

12_ $\sum \overrightarrow{M}_{O_3\,ext\to 3}\cdot\vec{y}_3 = \vec{\delta}_{O_3, 3/R_g}\cdot\vec{y}_3$

d'où $C_{m3} = -aMg\sin(\alpha+\beta)\cos\varphi + B\dot{\omega}_y + (A-C)\,\omega_x\omega_z$

(1)

Partie III (6)

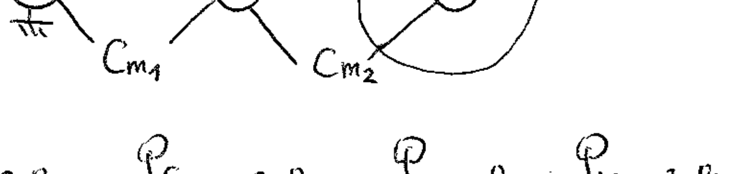
13_ $E_c(2/R_g) = \frac{1}{2}M_2\left|\overrightarrow{V}_{G_2,2/0}\right|^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{20}\left[I_{G_2,(2)}\right]\left(\vec{\Omega}_{20}\right)$

$$\overrightarrow{V}_{G_2,2/0} = \frac{d}{dt}\left(-l_1\vec{y}_1 + k\,\vec{y}_2\right) = +l_1\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 - k(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\,\vec{x}_2 \qquad \vec{\Omega}_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}+\dot{\beta} \end{pmatrix}_{b_2}$$

$$E_c(2/R_g) = \frac{1}{2}M_2\left\{l_1^2\dot{\alpha}^2 + k^2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2 - 2l_1 k\,\dot{\alpha}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos\beta\right\} + \frac{1}{2}C_2(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2$$

(1,5)

14_



$$\mathcal{P}_{ext\to 2, R_g} = \mathcal{P}_{Cm_2\to 2, R_g} + \mathcal{P}_{1\to 2, R_g} + \mathcal{P}_{pes\to 2, R_g}$$

$$\mathcal{P}_{Cm2 \to 2, Rg} = C_{m2}(\dot\alpha + \dot\beta)$$

$$\mathcal{P}_{pes \to 2, Rg} = -M_2 g \vec{y_0} \cdot \vec{V}_{G2,2/0} = -M_2 g \left(l_1 \dot\alpha \sin\alpha - k(\dot\alpha + \dot\beta)\sin(\alpha+\beta) \right)$$

$$\mathcal{P}_{1 \to 2, Rg} = \left\{ \mathcal{T}_{AM\,1\to 2} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{V}_{2/0} \right\} = \left\{ \begin{matrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \right\}_{O_2, b_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} 0 & l_1\dot\alpha \\ 0 & 0 \\ \dot\alpha + \dot\beta & 0 \end{matrix} \right\}_{O_2, b_1}$$

$$= X_{12} \cdot l_1 \cdot \dot\alpha$$

2 la puissance extérieure fait intervenir l'action de liaison $1 \to 2$ même si elle est parfaite car (1) n'est pas lié au repère galiléen.

2

15. Il faut choisir $k = 0$ pour minimiser les termes

C'est difficile à réaliser dans l'absolu car la répartition des masses évoluent en fonction des passagers. Il faut alors se placer dans une configuration la plus défavorable et prendre une moyenne. Ensuite, il place des contrepoids sur l'axe $O_2\vec{y_2}$ liés à (2).

0,5

16. $$\sum \mathcal{P}_{ext \to 2, Rg} = \left.\frac{dEc(2/R_g)}{dt}\right)_{/0}$$

$$C_{m2}(\dot\alpha + \dot\beta) - M_2 g l_1 \dot\alpha \sin\alpha + X_{12} l_1 \dot\alpha = C_2(\dot\alpha + \dot\beta)(\ddot\alpha + \ddot\beta) + M_2 l_1^2 \dot\alpha \ddot\alpha$$

$$C_{m2} = C_2(\ddot\alpha + \ddot\beta) + \frac{1}{(\dot\alpha + \dot\beta)}\left(M_2 g l_1 \dot\alpha \sin\alpha - X_{12} l_1 \dot\alpha + M_2 l_1^2 \dot\alpha \ddot\alpha \right)$$

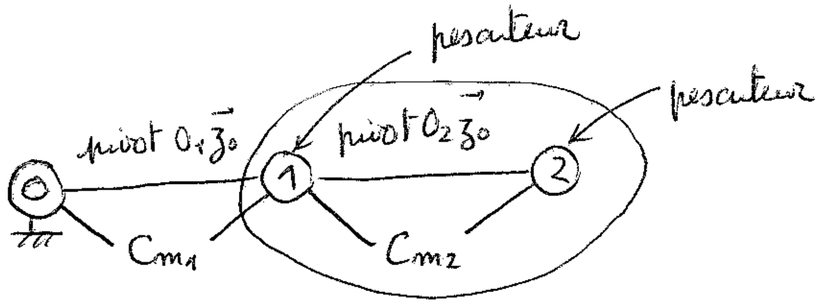
1

17. $$\mathcal{P}_{M_2} = C_{m2} \cdot \dot\beta$$

1

Partie IV (2)

18.



on isole l'ensemble

on écrit $Ec(\Sigma/R_g) = Ec(2/R_g) + Ec(1/R_g)$

défini à la question précédente

(1) est assimilé à une barre mais on ne donne pas la position de G_1

$$Ec(1/R_g) = \frac{1}{2} C_1 \cdot \dot{\alpha}^2$$

on écrit $\sum \mathcal{P}_{ext \to (1,2), R_g} + \mathcal{P}_{int}$

$C_{m_2}\dot{\beta}$

$\vec{O_1G_1} = a_1 \vec{y}_1$

$\mathcal{P}_{M_1} = C_{m1} \cdot \dot{\alpha}$

$\mathcal{P}_{pes \to 2} = - M_2 g (l_1 \dot{\alpha} \sin\alpha)$ si $k=0$ (question précédente)

$\mathcal{P}_{pes \to 1} = + M_1 g a_1 \dot{\alpha} \sin\alpha$

on écrit le Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dEc(\Sigma/R_g)}{dt} = \sum \mathcal{P}_{ext \to \Sigma, R_g} + \mathcal{P}_{int} \qquad (2)$$

$$C_{m1}\dot{\alpha} + C_{m2}\dot{\beta} - M_2 g l_1 \dot{\alpha} \sin\alpha + M_1 g l_1 \dot{\alpha} \sin\alpha$$

$$= C_1 \ddot{\alpha} + C_2(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) + M_2 l_1^2 \dot{\alpha}\ddot{\alpha} \quad \text{si } k=0$$