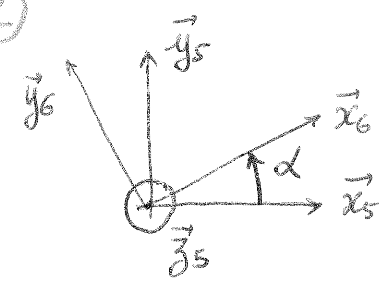
Examen de mécanique du solide INSA 3^{e}A. 2012

Support : centre d'usinage grande vitesse /30

Partie 1 : étude vibratoire 12



Q1a. Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, on a équilibrage
1 dynamique lorsque les efforts aux paliers ne sont pas perturbés par la répartition des masses sur le solide.

Pour ce faire, * le centre d'inertie doit être situé sur l'axe de rotation.

* l'axe de rotation doit être principal d'inertie

1 $$[I_{O_6,B_{61}}(\text{élect})] = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Q1b Le besoin cinématique est une rotation autour de l'axe $O_5\vec{z}_5$ modélisé par une liaison pivot.

Le choix technologique adopté est la réalisation de deux paliers dont 1 est arrêté axialement. Un angle de rotulage admissible sur chacun des paliers conduit au modèle liaison rotule + liaison linéaire
1 annulaire équivalent statiquement à une liaison pivot. L'intérêt est lié à la reprise des efforts de coupe.

Q1c. $M_6 = M_e + M_o$

$$M_6 \overrightarrow{O_6G_6} = M_e \overrightarrow{O_6G_e} + M_o \overrightarrow{O_6S}$$

$$\begin{cases} /\vec{x_6} & M_6\, x_{G_6} = M_o e \\ /\vec{y_6} & y_{G_6} = 0 \\ /\vec{z_6} & M_6\, z_{G_6} = M_e (a+c) \end{cases}$$

$$x_{G_6} = \frac{M_o}{M_6} e \qquad y_{G_6} = 0$$

$$z_{G_6} = \frac{M_e}{M_6}(a+c)$$

1

Q1.d $[I_{O_6,B_6,(6)}] = [I_{O_6,B_6,elect}] + [I_{O_6,B_6,S}]$

$$\overrightarrow{O_6S} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [I_{O_6,B_6,S}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_o e^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_o e^2 \end{pmatrix}$$

$$[I_{O_6,B_6,(6)}] = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B + M_o e^2 & 0 \\ 0 & 0 & C + M_o e^2 \end{pmatrix}$$

1

Q1.e $\vec{\Omega}_{6/R_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}$

$$\{\mathcal{C}_i(6/R_3)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_c}(6/R_3) \\ \vec{\sigma}_{O_6}(6/R_3) \end{Bmatrix}_{O_6}$$

Torseur cinétique

$$\overrightarrow{R_c}(6/R_3) = M_6 \overrightarrow{V_{G_6,6/R_3}} = M_o e \dot{\alpha}\, \vec{y_6}$$

$$\vec{\sigma}_{O_6}(6/R_3) = [I_{O_6}(6)](\vec{\Omega}_{6/R_3}) = (C + M_o e^2)\dot{\alpha}\, \vec{z_6}$$

O_6 est point fixe de $6/R_3$

2

$$\{\mathcal{D}(6/R_3)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(6/R_3) \\ \vec{\delta}_{O_6}(6/R_3) \end{Bmatrix}_{O_6}$$

Torseur dynamique

$$\overrightarrow{R_d}(6/R_3) = \left.\frac{d\overrightarrow{R_c}(6/R_3)}{dt}\right)_{/R_3} = M_o e \ddot{\alpha}\, \vec{y_6} - M_o e \dot{\alpha}^2\, \vec{x_6}$$

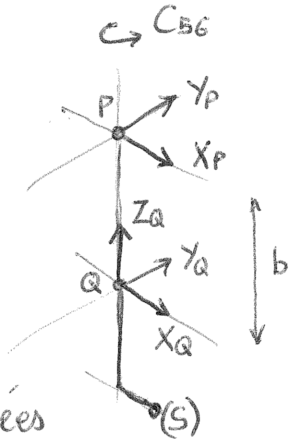
$$\vec{\delta}_{O_6,6/R_3} = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{O_6,6/R_3}}{dt}\right)_{/R_3} = (C + M_o e^2)\ddot{\alpha}\, \vec{z_6}$$

O_6 est point fixe.

2

Q1.f Torseur en Q $\left\{T_{Q_{5\to6}}\right\} = \begin{Bmatrix} X_Q & 0 \\ Y_Q & 0 \\ Z_Q & 0 \end{Bmatrix}_{Q,B_6}$

Torseur en P $\left\{T_{P_{5\to6}}\right\} = \begin{Bmatrix} X_P & 0 \\ Y_P & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P,B_6}$



On isole (6)

BAM ext
- couple moteur $C_{56}\vec{z}_5$
- action en Q
- action en P
- pesanteur et action pièce-outil négligées

$\sum \vec{F}_{ext\to6} = \vec{R_d}(6/R_3)$

R_3 est galiléen

$$\begin{cases} X_Q + X_P = -M_0 e \dot{\alpha}^2 \\ Y_Q + Y_P = M_0 e \ddot{\alpha} \\ Z_Q = 0 \end{cases}$$

$\sum \vec{M}_{Q\,ext\to6} = \vec{\delta}_{Q,6/R_3}$

$$\vec{\delta}_{Q,6/R_3} = \vec{\delta}_{O_6,6/R_3} + \left\{\vec{QO_6} \wedge \vec{R_d}(6/R_3)\right\}$$
$$= (C + M_0 e^2)\ddot{\alpha}\,\vec{z}_6 + M_0 e a \ddot{\alpha}\,\vec{x}_6 + M_0 e a \dot{\alpha}^2\,\vec{y}_6$$

$\vec{QO_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}_{B_6}$ et $\vec{R_d}(6/R_3) = \begin{pmatrix} -M_0 e a \dot{\alpha}^2 \\ M_0 e a \ddot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}_{B_6}$

$$\begin{cases} -Y_P . b = M_0 e a \ddot{\alpha} \\ X_P . b = M_0 e a \dot{\alpha}^2 \\ C_{56} = (C + M_0 e^2)\ddot{\alpha} \end{cases}$$

d'où $X_P = \dfrac{M_0 e a}{b}\dot{\alpha}^2$ $\quad X_Q = -\dfrac{M_0 e (a+b)}{b}\dot{\alpha}^2$

$Y_P = -\dfrac{M_0 e a}{b}\ddot{\alpha}$ $\quad Y_Q = \dfrac{M_0 e (a+b)}{b}\ddot{\alpha}$

$Z_Q = 0$

Q1.g si $\ddot{\alpha} = 0$ $\quad Y_P = Y_Q = 0$

$\|\vec{F}_{P_{5\to6}}\| = X_P = \dfrac{M_0 e a}{b}\dot{\alpha}^2$

$\|\vec{F}_{Q_{5\to6}}\| = -X_Q = \dfrac{M_0 e (a+b)}{b}\dot{\alpha}^2$

	config 1	config. 2
X_P	86,6 N	246,4 N
X_Q	246,4 N	985,6 N

Q1.h Le desequilibrage du à l'outil peut provenir

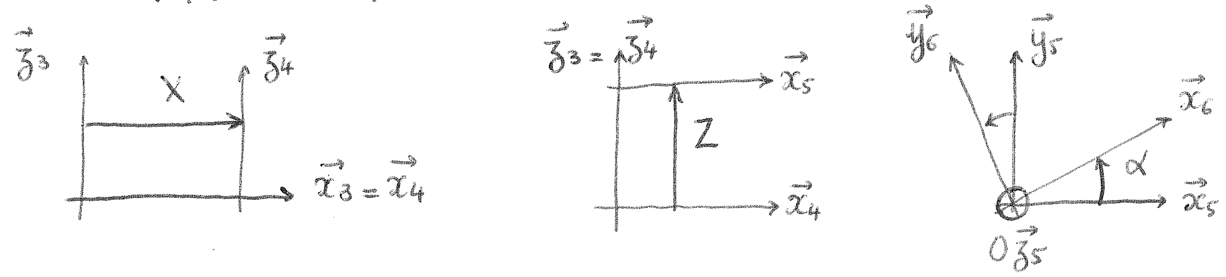
* du desequilibrage de l'outil lui même. Dans ce cas, il est necessaire d'equilibrer l'outil par enlevement de matiere.
* du positionnement de l'outil dans le porte outil (cause la plus probable). Dans ce cas, il faut regarder les tolérances des surfaces de positionnement relatif pour minimiser l'excentration.

1

Partie 2 : Liaison glissiere d'axe X

10

$\ddot{X} \neq 0 \qquad \ddot{Z} \neq 0 \qquad \dot{\alpha} = cste$



Q2a. $\{\mathcal{D}_{\{456\}/R_3}\} = \{\mathcal{D}_{4/R_3}\} + \{\mathcal{D}_{5/R_3}\} + \{\mathcal{D}_{6/R_3}\}$

resultante dynamique $\vec{Rd}(456/R_3) = \vec{Rd}(4/R_3) + \vec{Rd}(5/R_3) + \vec{Rd}(6/R_3)$

nature du mvt : Translation d'axe $\vec{x}_3$

$M_4 \cdot \ddot{X}\, \vec{x}_3$

nature du mvt : 2 translations

$M_5 \ddot{X}\, \vec{x}_3 + M_5 \ddot{Z}\, \vec{z}_3$

nature du mvt : 2 trasl. + 1 rotation

G_6 est sur l'axe de rotation

$\vec{V}_{G_6,6/R_3} = \dot{X}\, \vec{x}_3 + \dot{Z}\, \vec{z}_3$

$\vec{a}_{G_6,6/R_3} = \ddot{X}\, \vec{x}_3 + \ddot{Z}\, \vec{z}_3$

d'où $\vec{Rd}(456/R_3) = (M_4 + M_5 + M_6)\, \ddot{X}\, \vec{x}_3$

$+ (M_5 + M_6)\, \ddot{Z}\, \vec{z}_3$

2.5

moment dynamique en O_4 $\quad \vec{\delta}_{O_4(456/R_3)} = \vec{\delta}_{O_4(4/R_g)} + \vec{\delta}_{O_4(5/R_g)} + \vec{\delta}_{O_4(6/R_3)}$

* $4/R_g$ translation d'où $\vec{\delta}_{G_4,4/R_g} = \vec{0}$ $\quad O_4$ confondu avec G_4 donc $\vec{\delta}_{O_4(4/R_g)} = \vec{0}$

* $5/R_g$ 2 translations d'où $\vec{\delta}_{G_5,5/R_3} = \vec{0}$ $\quad \vec{\delta}_{O_4,5/R_3} = \vec{\delta}_{G_5,5/R_3} + \left\{\overrightarrow{O_4G_5} \wedge \vec{Rd}(5/R_3)\right\}$

$$\overrightarrow{O_4G_5} = \ell_4 \vec{y}_3 + Z \vec{z}_3$$

$$\vec{\delta}_{O_4,5/R_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell_4 \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} M_5 \ddot{X} \\ 0 \\ M_5 \ddot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_4 M_5 \ddot{Z} \\ Z M_5 \ddot{X} \\ -\ell_4 M_5 \ddot{X} \end{pmatrix}_{B_3}$$

* $6/R_g$ 2 translations + 1 rotation $\quad \vec{\delta}_{G_6,6/R_3} = \left.\dfrac{d\vec{\sigma}_{G_6,6/R_3}}{dt}\right)_{/R_3}$ $\quad G_6$ est centre d'inertie

$\vec{\sigma}_{G_6,6/R_3} = C_6 \dot{\alpha} \vec{z}_6$ en supposant que (6) est équilibré dynamiquement.

$I_{G_6 z_6} = I_{O_6 z_6} = C_6$

d'où $\vec{\delta}_{G_6,6/R_3} = \vec{0}$ car $\dot{\alpha} = \text{cste}$

$$\vec{\delta}_{O_4,6/R_3} = \vec{\delta}_{G_6,6/R_3} + \left\{\overrightarrow{O_4G_6} \wedge \vec{Rd}(6/R_3)\right\}$$

$$\vec{\delta}_{O_4,6/R_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell_4 \\ (Z+a) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} M_6 \ddot{X} \\ 0 \\ M_6 \ddot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_4 M_6 \ddot{Z} \\ (Z+a) M_6 \ddot{X} \\ -\ell_4 M_6 \ddot{X} \end{pmatrix}_{B_3}$$

d'où $\quad \vec{\delta}_{O_4(456/R_3)} = \begin{pmatrix} \ell_4 (M_5+M_6) \ddot{Z} \\ Z(M_5+M_6)\ddot{X} + a M_6 \ddot{X} \\ -\ell_4 (M_5+M_6) \ddot{X} \end{pmatrix}_{B_3}$

/2

Q2.b $\quad$ on isole le système $(456) \equiv (\Sigma)$

BAM ext $\rightarrow (\Sigma)$ $\quad \{F_{ext \rightarrow 456}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O_4, B_3}$

B_3 est galiléen $\quad \{F_{ext \rightarrow 456}\} = \{\mathcal{D}(456/R_3)\}$

on déduit

$$X = (M_4 + M_5 + M_6)\ddot{X} \qquad L = \ell_4 (M_5 + M_6)\ddot{Z}$$

$$Y = 0 \qquad M = \{Z(M_5 + M_6) + aM_6\}\ddot{X}$$

$$Z = (M_5 + M_6)\ddot{Z} \qquad N = -\ell_4 (M_5 + M_6)\ddot{X}$$

1

Q2.c BAMext

1

* pesanteur → 4 $\quad -M_4 g \vec{z}_3$ en O_4
* pesanteur → 5 $\quad -M_5 g \vec{z}_3$ en G_5
* pesanteur → 6 $\quad -M_6 g \vec{z}_3$ en G_6
* glissière 3 → 4 $\quad \left\{\begin{array}{c|c} 0 & L_{34} \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & N_{34} \end{array}\right\}_{O_4, B_3}$
* efforts de coupe $\quad \left\{\begin{array}{c|c} X_c & 0 \\ Y_c & 0 \\ Z_c & C_{zc} \end{array}\right\}_{O_6, B_3}$
* vis → écrou $\quad \left\{\begin{array}{c|c} F_v & \frac{P}{2\pi} F_v \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{E, B_3}$

$$\sum \overrightarrow{F_{ext \to 456}} = \overrightarrow{Rd}(456/R_3)$$

$$\begin{cases} X_c + F_v = (M_4 + M_5 + M_6)\ddot{X} \\ Y_c + Y_{34} = 0 \\ Z_c + Z_{34} - (M_4 + M_5 + M_6)g = (M_5 + M_6)\ddot{Z} \end{cases}$$

1

$$\sum \overrightarrow{M}_{O_4 ext \to 456} = \vec{\delta}_{O_4, 456/R_3}$$

$$\overrightarrow{M}_{O_4(pes \to 5)} = \overrightarrow{O_4 G_5} \wedge -M_5 g \vec{z}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell_4 \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_5 g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell_4 M_5 g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_3}$$

$$\overrightarrow{M}_{O_4}(pes \to 6) = \overrightarrow{O_4 G_6} \wedge -M_6 g \vec{z}_3 = \begin{pmatrix} -\ell_4 M_6 g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_3} \quad \text{(par analogie)}$$

$$\overrightarrow{M}_{O_4}(vis \to écrou) = \overrightarrow{O_4 E} \wedge F_v \vec{x}_3 + \frac{P}{2\pi} F_v \vec{x}_3 = -d\vec{z}_3 \wedge F_v \vec{x}_3 + \frac{P}{2\pi} F_v \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \frac{P}{2\pi} F_v \\ -dF_v \\ 0 \end{pmatrix}_{B_3}$$

$$\overrightarrow{M}_{O4(p\to6)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{zc} \end{pmatrix}_{B_3} + \left(\overrightarrow{O_4O_6} \wedge \vec{F_c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{zc} \end{pmatrix}_{B_3} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ell_4 \\ Z-a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_4 Z_c - (Z-a) Y_c \\ (Z-a) X_c \\ C_{zc} - \ell_4 X_c \end{pmatrix}_{B_3}$$

d'où les equations de moment

$$\begin{cases} -\ell_4 M_5 g - \ell_4 M_6 g + \frac{P}{2\pi} F_v + \ell_4 Z_c - (Z-a) Y_c + L_{34} = \ell_4 (M_5 + M_6) \ddot{Z} \\ -d F_v + (Z-a) X_c + M_{34} = \{ Z (M_5 + M_6) + a M_6 \} \ddot{X} \\ C_{zc} - \ell_4 X_c = -\ell_4 (M_5 + M_6) \ddot{X} - N_{34} \end{cases}$$

/2

Q2.d

$$\begin{cases} Y_{34} = -Y_c = 100\,N \\ Z_{34} = -Z_c + (M_\Sigma g) = 100 + 4300 = 4400\,N \\ L_{34} = \ell_4 (M_5 + M_6) g - \frac{P}{2\pi} F_v - \ell_4 Z_c + (Z-a) Y_c = 631{,}5\,N.m \\ M_{34} = \{ Z (M_5 + M_6) + a M_6 \} \ddot{X} - (Z-a) X_c + d F_c = 1620\,N.m \\ N_{34} = -\ell_4 (M_5 + M_6) \ddot{X} + \ell_4 X_c - C_{zc} = -875\,N.m \end{cases}$$

/2

$$F_v = -X_c + M_\Sigma \ddot{X} = 100 + 430 \times 10 = 4400\,N$$

Partie 3 Moteur d'entrainement

$\ddot{X} \neq 0 \quad \dot{Z} = 0 \quad \dot{\alpha} = cste$

Q3a. $E_c(\Sigma/R_3) = E_c(\text{trans}) + E_c(4) + E_c(5) + E_c(6)$

$E_c(\text{trans}) = \frac{1}{2} J_m \Omega^2$

$E_c(4) = \frac{1}{2} M_4 \dot{X}^2$ (translation suivant $\vec{x}_3$)

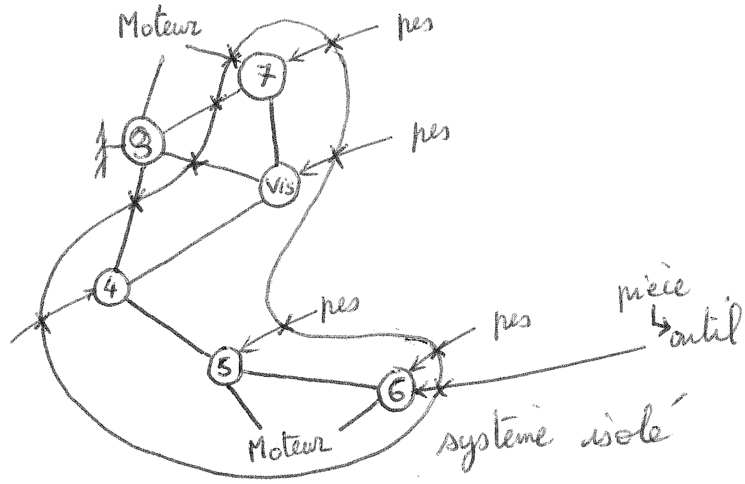
$E_c(5) = \frac{1}{2} M_5 \dot{X}^2$ car $\dot{Z} = 0$

$E_c(6) = \frac{1}{2} M_6 \dot{X}^2 + \frac{1}{2} C_6 \dot{\alpha}^2$ (translation suivant $\vec{x}_3$ + rotation autour de $O_6\vec{z}_3$)

$$E_c(\Sigma/R_3) = \frac{1}{2} J_m \Omega^2 + \frac{1}{2}(M_4+M_5+M_6)\dot{X}^2 + \frac{1}{2} C_6 \dot{\alpha}^2$$

/ 2

Q3.b



BAM ext

* les actions de pesanteur ne travaillent pas (aucun deplacement suivant $\vec{z}_3$)

* pivot 7/3 supposée parfaite

* pivot vis/3 supposée parfaite

* glissière 4/3 supposée parfaite

* couple moteur $C_m \vec{x}_3$ $\quad \mathcal{P}_{C_m} = C_m . \Omega$

1

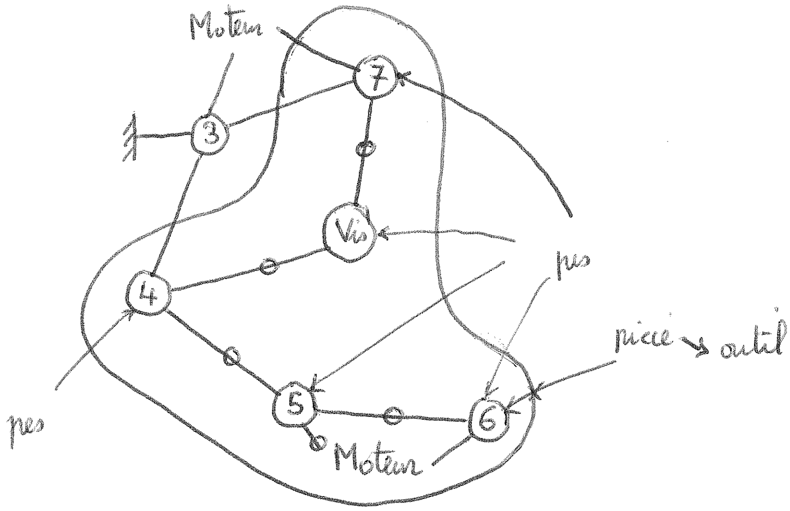
* action pièce → outil $\quad \mathcal{P}_{p\to 6, R_3} = \{F_{p\to 6}\} \otimes \{\mathcal{V}_{6/R_3}\}$

$\vec{\Omega}_{6/R_3} = \dot{\alpha}\,\vec{z}_3$

$\vec{V}_{O6,6/R_3} = \dot{X}\,\vec{x}_3$

d'où $\mathcal{P}_{p\to 6, R_3} = C_{zc}.\dot{\alpha} + X_c.\dot{X}$

Q3c



BAM intérieures

* action de transmission sans glissement $\mathcal{P}_{7\leftrightarrow vis} = 0$
* vis – écrou supposée parfaite $\mathcal{P}_{vis-ecrou} = 0$
* 4–5 pas de mouvement relatif $(\dot{z} = 0)$ $\mathcal{P}_{4-5} = 0$
* 5–6 liaison pivot parfaite $\mathcal{P}_{5-6} = 0$
* moteur de l'électrobroche $\mathcal{P}_{Cb} = C_b.\vec{z}_5.\vec{\Omega}_{6/5} = C_b.\dot{\alpha}$

Q3d. $\dfrac{dE_c(\Sigma/R_3)}{dt} = \mathcal{P}_{ext\to\Sigma, R_3} + \mathcal{P}_{int}$

$$J_m.\Omega.\dot{\Omega} + (M_4+M_5+M_6)\,\dot{X}.\ddot{X} + C_6\,\dot{\alpha}\,\ddot{\alpha} = C_m\Omega + C_{zc}\dot{\alpha} + X_c\dot{X} + C_b\dot{\alpha}$$

$$C_m = \frac{1}{\Omega}\left\{\left(J_m + (M_4+M_5+M_6)\frac{P^2}{(2\pi N)^2}\right)\Omega\dot{\Omega} + \cancel{C_6\dot{\alpha}\ddot{\alpha}} - (C_{zc}+C_b)\dot{\alpha} + X_c\frac{P}{2\pi N}\Omega\right\}$$

Q3e $\quad C_m = \underbrace{\left(J_m + (M_4+M_5+M_6)\frac{P^2}{(2\pi N)^2}\right)\dot{\Omega}}_{20{,}95\ Nm\ +\ 10{,}26\ N.m} - X_c\underbrace{\frac{P}{2\pi N}}_{0{,}238\ N.m}$

$\dfrac{P}{2\pi N} = 2{,}38\ mm$

$\dot{\Omega} = 4189\ rad/s^2$

Effets d'inertie prépondérants