

## Examen de Mécanique du Solide 2 (I3ICMG20)

Durée 2h30' aucun document autorisé

Janvier 2014

Lors de la correction, une attention particulière sera portée à la clarté de la copie et à la rigueur des démarches et des justifications exposées par l'étudiant.

### Conception préliminaire d'un robot tout terrain

Le robuROC 6 (photographie 1) est un robot mobile développé par la société ROBOSOFT. Cette plate-forme robotisée a été conçue pour des applications de recherche et d'exploration en milieu extérieur. Elle est équipée de 6 roues motrices indépendantes, de même diamètre, montées par paires sur 3 podes articulés en tangage et en roulis (figure 2). La cinématique permet à la plate-forme de se conformer au relief parcouru et de franchir des obstacles du type trottoirs, escaliers, etc. Afin d'explorer la zone géographique à risques, les 3 podes peuvent être équipés, selon les besoins de l'utilisateur, de caméras d'observation haute définition à 360°, de systèmes infrarouges de visualisation nocturne, ainsi que de bras de robot articulés pour manipuler des éléments de la zone à explorer.

Dans la suite de l'étude, on se focalise sur un mode particulier de fonctionnement dans lequel la plateforme effectue un seul mouvement de lacet (rotation d'axe vertical, de paramètre  $\varphi$ ) et seules les roues des podes central et arrière sont en contact avec le sol.

Pour ce mode de fonctionnement, on cherche à évaluer la rapidité de mise en lacet et à dimensionner les moteurs d'entraînement des roues droite et gauche montées sur le pode central.

### Modélisation

Le repère terrestre  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est considéré comme un repère Galiléen.

On considère pour simplifier que la plate-forme en étude est modélisée comme l'indique la figure 2. La plateforme est un système matériel  $S = \{1+2+3\}$  constitué de 3 solides rigides articulés entre eux :

- l'ensemble (1), supposé rigide dans cette phase d'étude, constitué de l'ensemble des châssis des trois podes, des deux roues avant et des deux roues arrière de rayon  $r$ . L'ensemble (1) de masse

$$M, \text{ de centre d'inertie } G \text{ tel que } O_1\vec{G} = -b\vec{y}_1 \text{ et de matrice d'inertie } [I_{G,\beta_1}(1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\beta_1} \text{ .est}$$

associé au repère  $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  défini à partir du repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  par rotation d'angle  $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ .

Pour ce mode, les roues avant ne touchent pas le sol. L'ensemble (1) est en contact avec le sol, au niveau des roues arrières aux points  $I_4$  et  $I_5$ . Ces contacts sont supposés avec frottement et avec glissement. Les composantes normales des actions de contact sont notées  $\vec{N}_4$  et  $\vec{N}_5$ . Les composantes tangentielles  $\vec{T}_4$  et  $\vec{T}_5$  des actions de contact entre les roues arrière et le sol sont portées par la direction de la vitesse de glissement aux points de contact respectifs  $I_4$  et  $I_5$  et s'opposent au glissement. Pour ces deux contacts, on utilise un modèle de frottement de Coulomb, de coefficient  $f'$ .

- la roue centrale gauche (2), de rayon  $r$ , de centre d'inertie  $C_2$  et de matrice d'inertie  $[I_{C_2, \beta_2}(2)] = \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{bmatrix}_{\beta_2}$  est associée au repère  $\mathcal{R}_2 = (C_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ . La roue (2) est en

liaison pivot parfaite avec l'ensemble (1), d'axe  $(C_2, \vec{x}_{12})$  et de paramètre d'espace  $\theta_2$  tel que  $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ . On note  $O_1\vec{C}_2 = -a\vec{x}_1$ . La roue (2) est également en contact ponctuel avec frottement avec le sol horizontal au point  $I_2$ . On utilise un modèle de frottement de Coulomb, de coefficient  $f$ . De plus, un moteur installé entre l'ensemble (1) et la roue (2) permet de produire un couple  $\vec{M}_{C_2 \rightarrow 2} = C_{m2} \vec{x}_1$ .

- la roue centrale droite (3), de rayon  $r$ , de centre d'inertie  $C_3$  et de matrice d'inertie  $[I_{C_3, \beta_3}(2)] = \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & B_r & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{bmatrix}_{\beta_3}$  est associée au repère  $\mathcal{R}_3 = (C_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ . La roue (3) est en liaison

pivot parfaite avec l'ensemble (1) d'axe  $(C_3, \vec{x}_{13})$  et de paramètre d'espace  $\theta_3$  tel que  $\theta_3 = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$ . On note  $O_1\vec{C}_3 = a\vec{x}_1$ . La roue (3) est également en contact ponctuel avec frottement avec le sol horizontal au point  $I_3$ . On utilise un modèle de frottement de Coulomb, de coefficient  $f$ . De plus, un moteur installé entre l'ensemble (1) et la roue (3) permet de produire un couple  $\vec{M}_{C_3 \rightarrow 3} = C_{m3} \vec{x}_1$ .

Pour l'ensemble du problème ci après, on considère que les roues centrales (2) et (3) roulent sans glisser sur le sol (0).

## 1 - Détermination des conditions cinématiques de non glissement au contact des roues centrales

Pour cette partie de l'étude, on cherche à déterminer quelles sont les relations liant les paramètres d'espace lorsque les roues centrales ne glissent pas dans le mode de mise en lacet.

Question 1.1 . Ecrire et expliciter la condition cinématique de roulement sans glissement au point de contact  $I_2$ , de la roue (2) par rapport au sol (0). On supposera que la vitesse du point  $O_1$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  est connue et notée  $\vec{V}_{O_1 \in 1/0}$  .

Question 1.2 . Ecrire et expliciter la condition cinématique de roulement sans glissement au point de contact  $I_3$ , de la roue (3) par rapport au sol (0). On supposera que la vitesse du point  $O_1$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  est connue et notée  $\vec{V}_{O_1 \in 1/0}$  .

## 2 - Détermination de l'accélération de mise en lacet maximale

Dans cette partie de l'étude, on cherche à déterminer quelle est l'accélération maximale de mise en lacet que l'on peut atteindre lorsque l'on est à la limite du glissement au niveau des contacts en  $I_2$  et  $I_3$ . Pour cela, on utilise le principe fondamental de la dynamique.

Question 2.1. A partir des résultats précédents, montrer que si les roues (2) et (3) ne glissent pas par rapport au sol alors  $\vec{V}_{O_1 \in 1/0} = \vec{0}$  et  $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_3$  . En déduire une relation entre  $\dot{\phi}, \dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$

Pour toutes les questions suivantes de la partie 2, on considère que ces relations sont vérifiées.

Question 2.2. Donner la relation liant les composantes normale  $\vec{N}_2$  et tangentielle  $\vec{T}_2$  de l'action de contact de l'ensemble (1) sur le sol (0) en  $I_2$ . Donner la relation liant les composantes normale  $\vec{N}_3$  et tangentielle  $\vec{T}_3$  de l'action de contact de l'ensemble (1) sur le sol (0) en  $I_3$ .

Question 2.3. Donner la relation liant les composantes normale  $\vec{N}_4$  et tangentielle  $\vec{T}_4$  de l'action de contact de l'ensemble (1) sur le sol (0) en  $I_4$ . Donner la relation liant les composantes normale  $\vec{N}_5$  et tangentielle  $\vec{T}_5$  de l'action de contact de l'ensemble (1) sur le sol (0) en  $I_5$ .

Question 2.4. En remarquant les mouvements particuliers des point  $I_4$  et  $I_5$  appartenant à la plate-forme 1 dans son mouvement par rapport au sol (0), indiquer précisément sur un schéma la direction et le sens de la composante tangentielle  $\vec{T}_4$  pour une vitesse de mise en lacet positive ( $\dot{\phi} > 0$ ).

Question 2.5. La composante tangentielle de l'action de contact entre la roue (2) et le sol (0) en  $I_2$  est notée  $T_2 \vec{y}_1$ . La composante tangentielle de l'action de contact entre la roue (3) et le sol (0) en  $I_3$  est notée  $-T_3 \vec{y}_1$ . Pour les actions de pesanteur, on néglige la contribution des masses des roues devant celle de la masse de la plate-forme. Donner et expliciter les 3 équations fournies par le théorème de la résultante dynamique appliqué à l'ensemble de la plate-forme  $S = \{1+2+3\}$ , en projection dans le repère  $\mathcal{R}_1$ . On donnera clairement les résultats intermédiaires et on pourra utiliser l'angle  $\alpha$  tel que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{c} .$$

Question 2.6. Expliquer pourquoi  $[I_{C_2, \mathcal{B}_1}(2)] = [I_{C_2, \mathcal{B}_2}(2)]$  et  $[I_{C_3, \mathcal{B}_1}(3)] = [I_{C_3, \mathcal{B}_3}(3)]$

Question 2.7. Appliquer le théorème du moment dynamique à l'ensemble de la plateforme  $S = \{1+2+3\}$  au point  $O_1$  et développer le calcul pour la seule composante selon l'axe  $\vec{z}_{01}$ , en projection dans le repère  $R_1$ . Montrer qu'elle peut être mise sous la forme  $k_1 \ddot{\phi} = k_2(T_2 + T_3) + k_3(T_4 + T_5)$ . On donnera clairement les résultats des calculs intermédiaires.

Question 2.8. En combinant les résultats des questions précédentes, donner l'expression de l'accélération maximale de mise en lacet en fonction des paramètres caractérisant la plateforme et les conditions d'adhérence au niveau des roues. Quelles vitesses de rotation  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$  doivent produire les moteurs associés aux roues 2 et 3 pour pouvoir atteindre cette accélération ?

### **3 - Détermination des moteurs**

*L'objectif de cette partie de l'étude est de valider l'aptitude des moteurs à suivre la loi de vitesse en lacet exigée. On cherche à déterminer les couples moteurs  $C_m$  produits par les moteurs sur les roues centrales par une approche énergétique. Pour cela, on utilise le théorème de l'énergie cinétique.*

Dans cette partie de l'étude, on considère que les moteurs sont asservis en couple et qu'ils transmettent un couple identique  $\vec{M}_{C_3 \rightarrow 3} = C_m \vec{x}_1$  et  $\vec{M}_{C_2 \rightarrow 2} = C_m \vec{x}_1$  à chacune des roues motrices 2 et 3, et en considérant que les roues centrales (2) et (3) roulent sans glisser sur le sol (0).

Question 3.1. Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble des solides  $S = \{1+2+3\}$  en mouvement par rapport au repère galiléen  $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , le résultat sera mis sous la forme  $T_{S/R_0} = \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2$  où  $J$  est à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.

Question 3.2. Déterminer la puissance développée par les efforts extérieurs appliqués au système  $S = \{1+2+3\}$  en mouvement par rapport au repère galiléen  $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et toujours sur le mode particulier de fonctionnement où la plateforme effectue un mouvement de lacet (rotation d'axe vertical, de paramètre  $\phi$ ).

Question 3.3. Déterminer la puissance développée par les efforts intérieurs au système  $S = \{1+2+3\}$ .

Question 3.4. Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique afin de déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$ . Vous donnerez le résultat sous la forme  $C_m = k_4 (J \dot{\phi} + k_5 (T_4 + T_5))$  où  $k_4$  et  $k_5$  sont à exprimer sous forme littérale en fonction des données du problème.

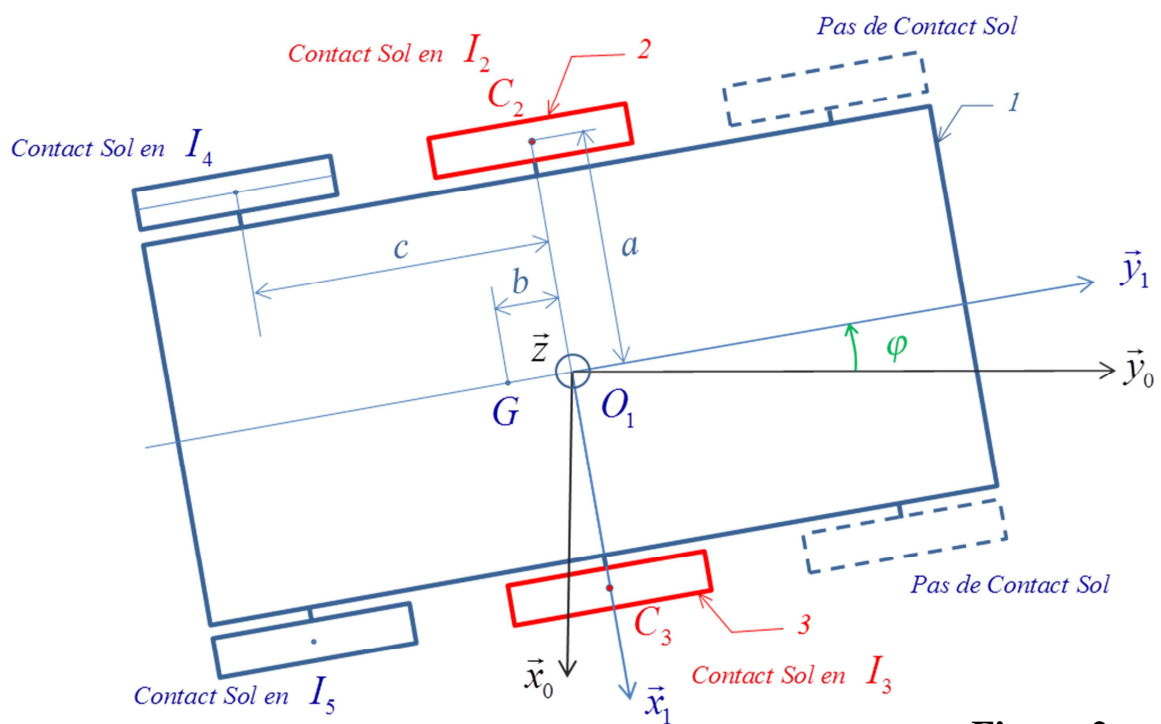
Question 3.5. Application numérique (A rédiger...):

Soit  $J = 34 \text{ kg.m}^2$ ,  $k_4 = 1,3 \times 10^{-4}$  sans unité  $k_5 = 0,65 \text{ m}$

Calculer le couple moteur maximal  $C_m$ : A partir du graphe de fonctionnement du moteur conclure quant à l'aptitude de la motorisation à générer le mouvement de lacet désiré.



**Photographie 1 : Vue du RobuROC 6**



**Figure 2 : Schéma du RobuROC 6**

