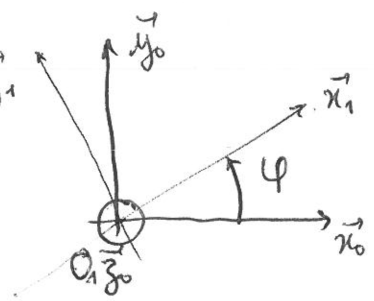
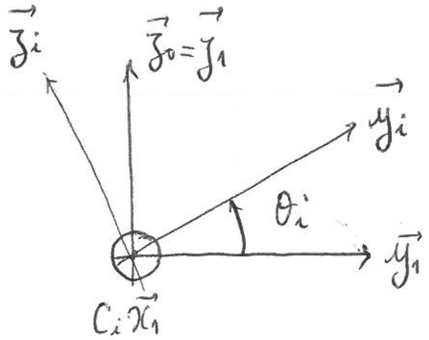
Examen Mécanique 3IC 2014

I - Conditions cinématiques

Q1.1





$\vec{V}_{I_2,2/0} = \vec{0}$ / 0,5

$\vec{V}_{C_2,2/0} + (\vec{I_2C_2} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}) = \vec{0}$

$\vec{V}_{O_1,1/0} + \frac{d}{dt}(-a\vec{x}_1)$

$\vec{V}_{O_1,1/0} - a\dot{\varphi}\vec{y}_1$

$r\vec{z}_1 \wedge (\dot{\varphi}\vec{z}_1 + \dot{\theta}_2\vec{x}_1) = r\dot{\theta}_2\vec{y}_1$

d'où

$V_{y_1(O_1)} - a\dot{\varphi} + r\dot{\theta}_2 = 0$ / 0,5

Q1.2

$\vec{V}_{I_3,3/0} = \vec{0}$

$\vec{V}_{C_3,3/0} + (\vec{I_3C_3} \wedge \vec{\Omega}_{3/0}) = \vec{0}$

$\vec{V}_{O_1,1/0} + \frac{d}{dt}(a\vec{x}_1)$

$r\vec{z}_1 \wedge (\dot{\varphi}\vec{z}_1 + \dot{\theta}_3\vec{x}_1) = r\dot{\theta}_3\vec{y}_1$

$\vec{V}_{O_1,1/0} + a\dot{\varphi}\vec{y}_1$

$V_{y_1(O_1)} + a\dot{\varphi} + r\dot{\theta}_3 = 0$ / 0,5

II - Accélération maximale

Q2.1

la rotation de lacet autour de $O\vec{z_0}$ impose $V_{y_1}(O_1) = 0$

par ailleurs $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_3 = \frac{a}{r}\dot{\varphi}$ / 0,5

Q2.2

le roulement sans glissement en I_2 et I_3 implique que l'action de contact se situe dans un cône de frottement

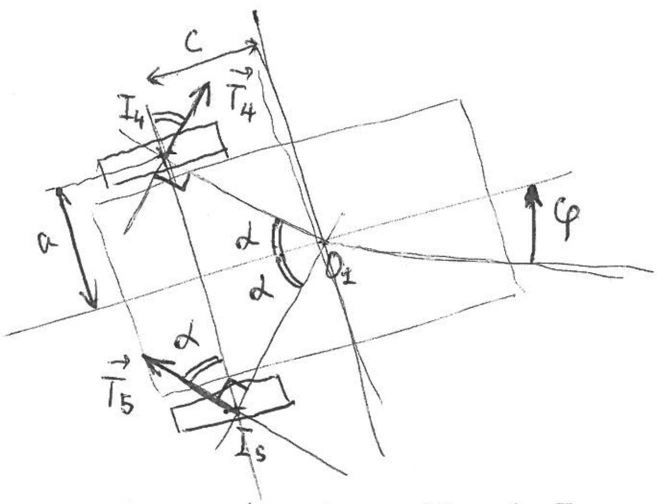
d'où $\|\vec{T_2}\| \leq f.|N_2|$ et $\|\vec{T_3}\| \leqslant f|N_3|$

remarque : $\|\vec{T_2}\| = |T_{2y}|$ $\|\vec{T_3}\| = |T_{3y}|$ / 0,5

Q2.3

le glissement en I_4 et I_5 impliquent les relations suivantes $\|\vec{T_4}\| = f'|N_4|$ $\|\vec{T_5}\| = f'|N_5|$ / 0,5

Q2.4



Pour $\dot{\varphi} > 0$, les roues 4 et 5 glissent en I_4 et I_5 avec une vitesse de glissement orthoradiale.

Les actions tangentielles de contact s'opposent aux vitesses de glissement (voir shéma ci-dessus)

/ 1

Q2.5

on isole $\{1+2+3\}$

BAM extérieures
- contact ponctuel en I_2 $\quad T_2\vec{y_1} + N_2\vec{z_1}$
- contact ponctuel en I_3 $\quad -T_3\vec{y_1} + N_3\vec{z_1}$
- contact ponctuel en I_4 $\quad -T_4\cos\alpha\,\vec{x_1} + T_4\sin\alpha\,\vec{y_1} + N_4\vec{z_1}$
- contact ponctuel en I_5 $\quad -T_5\cos\alpha\,\vec{x_1} - T_5\sin\alpha\,\vec{y_1} + N_5\vec{z_1}$
- pesanteur $\rightarrow \{1+2+3\}$ $\quad -Mg\,\vec{z_1}$ en G

1

$$\sum \vec{F}_{ext \rightarrow E} = \overrightarrow{Rd}(E/R_0)$$

résultante dynamique $\overrightarrow{Rd}(E/R_0) = M.\,\Gamma_{G,1/R_0}$

$$= M(b\ddot{\varphi}\,\vec{x_1} + b\dot{\varphi}^2\,\vec{y_1})$$

1

(mouvement de rotation autour d'un axe fixe)

$$\overrightarrow{O_1G} = -b\vec{y_1} \qquad \vec{V}_{G,1/R_0} = b\dot{\varphi}\,\vec{x_1} \qquad \vec{\gamma}_{G,1/R_0} = b\ddot{\varphi}\,\vec{x_1} + b\dot{\varphi}^2\,\vec{y_1}$$

Equations
$$\begin{cases} -(T_4+T_5)\cos\alpha = Mb\ddot{\varphi} \\ (T_2-T_3) + (T_4-T_5)\sin\alpha = Mb\dot{\varphi}^2 \\ N_2 + N_3 + N_4 + N_5 - Mg = 0 \end{cases}$$

1

Q2.6

les roues (2) et (3) sont considérées comme des solides de révolution d'axe $C_2\vec{x_1}$ et $C_3\vec{x_1}$. les moments d'inertie dans la base liée au solide (2) autour de $C_2\vec{y_2}$ et $C_2\vec{z_2}$ sont égaux (il en est de même pour les moments d'inertie de (3) autour de $C_3\vec{y_3}$ et $C_3\vec{z_3}$).

les moments d'inertie sont donc identiques autour de tous les axes compris dans le plan $C_2\,\vec{y_2}\,\vec{z_2}$ (et $C_3\,\vec{y_3}\,\vec{z_3}$)

les matrices ont donc la même forme dans les bases (b_2) et (b_3) et dans la base (b_1)

1

Q2.7 on isole $\{1+2+3\} = \{E\}$

BAM extérieures (Voir Q2.5)

$$\sum \overrightarrow{M}_{O_1, ext \to E} = \overrightarrow{\delta}_{O_1}(E/R_0)$$

0,5

Moment dynamique

$$\overrightarrow{\delta}_{O_1}(E/R_0) = \overrightarrow{\delta}_{O_1}(1/R_0) + \overrightarrow{\delta}_{O_1}(2/R_0) + \overrightarrow{\delta}_{O_1}(3/R_0)$$

O_1 point fixe
mouvement de rotation autour d'un axe fixe d'un solide

$$\overrightarrow{\delta}_{O_1}(1/R_0) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_{O_1}}(1/R_0)\right)$$

$$\overrightarrow{\sigma}_{O_1}(1/R_0) = [I_{O_1}(1)]\{\overrightarrow{\Omega}_{1/R_0}\} = (C_1 + Mb^2)\dot{\varphi}\,\vec{z}_1$$

$$[I_{O_1}(1)] = \begin{pmatrix} A_1 + Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 + Mb^2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\delta}_{O_1}(1/R_0) = (C_1 + Mb^2)\ddot{\varphi}\,\vec{z}_1$$

0,5

C_2 centre d'inertie de (2)

$$\overrightarrow{\delta}_{C_2}(2/R_0) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_{C_2}}(2/R_0)\right)$$

$$\overrightarrow{\sigma_{C_2}}(2/R_0) = [I_{C_2,(2)}](\overrightarrow{\Omega}_{2/0})$$

$$= \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{b_1} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{b_1} = \begin{pmatrix} A_2\dot{\theta}_2 \\ 0 \\ B_2\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\delta}_{C_2}(2/R_0) = \frac{d}{dt}\left(A_2\dot{\theta}_2\,\vec{x}_1 + B_2\dot{\varphi}\,\vec{z}_1\right)$$

$$= A_2\ddot{\theta}_2\,\vec{x}_1 + A_2\dot{\theta}_2\dot{\varphi}\,\vec{y}_1 + B_2\ddot{\varphi}\,\vec{z}_1$$

les masses de (2) et (3) étant négligées

$$\overrightarrow{\delta}_{C_2}(2/R_0) = \overrightarrow{\delta}_{O_1}(2/R_0)$$

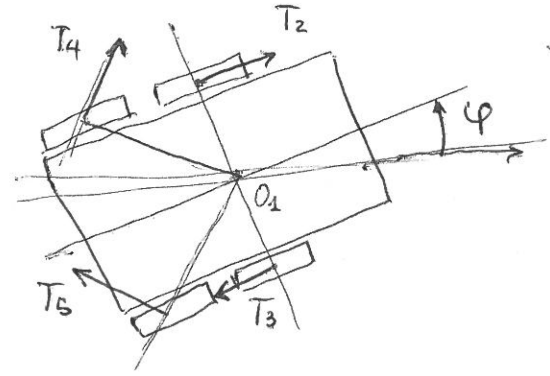
$$\overrightarrow{\delta}_{C_3}(3/R_0) = \overrightarrow{\delta}_{O_1}(3/R_0)$$

on déduit

$$\overrightarrow{\delta}_{O_1,E/R_0} = A_2(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3)\,\vec{x}_1 + A_2(\dot{\theta}_2\dot{\varphi} + \dot{\theta}_3\dot{\varphi})\,\vec{y}_1 + (C_1 + Mb^2 + 2B_2)\ddot{\varphi}\,\vec{z}_1$$

1

Moment des actions de contact autour de $O_1\vec{z}_1$



$$-(T_2 + T_3)\,a$$

$$-(T_4 + T_5)\sqrt{a^2 + c^2}$$

L'equation de moment autour de l'axe $O_1\vec{z}_1$ s'ecrit alors

$$-(T_2+T_3)\,a-(T_4+T_5)\sqrt{a^2+c^2}=(C_1+Mb^2+2B_r)\ddot{\varphi}$$

1

$k_1 = C_1 + Mb^2 + 2B_r$

$k_2 = -a$

$k_3 = -\sqrt{a^2+c^2}$

Q2.8

$$-(T_4+T_5)=\frac{Mb^2\ddot{\varphi}}{\cos\alpha}$$

$$\left(k_1-\frac{Mb^2}{\cos\alpha}\sqrt{a^2+c^2}\right)\ddot{\varphi}=-a\,(T_2+T_3)$$

On suppose par symetrie $N_2=N_3$ et $N_4=N_5$

$$(N_2+N_3)=Mg-(N_4+N_5)=Mg-\frac{1}{f'}\left(\frac{Mb^2\ddot{\varphi}}{\cos\alpha}\right)$$

Acceleration maximale losque $|T_2|=f|N_2|$ et $|T_3|=f|N_3|$

$$(T_2+T_3)=(N_2+N_3).f=-\frac{\left(k_1-\frac{Mb^2}{\cos\alpha}\sqrt{a^2+c^2}\right)}{a}\ddot{\varphi}$$

1

III - Détermination des moteurs

Q3.1

$$E_c(1+2+3) = E_c(1) + E_c(2) + E_c(3)$$

1) mouvement de rotation autour de $O, \vec{z_0}$
la matrice est donnée en G_1 } soit $E_c(1/0) = \frac{1}{2} I_{Oz_0} \cdot \dot{\varphi}^2$

avec $I_{Oz_0} = I_{G_1z_0} + Mb^2$

$$E_c(1/0) = \frac{1}{2}(C_1 + Mb^2)\dot{\varphi}^2$$

soit on peut passer par l'expression générale en G_1

$$E_c(1/0) = \frac{1}{2} M V_{G_1,1/0}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{1/0} [I_{G_1(1)}] \vec{\Omega}(1/0)$$

0,5

2) mouvement de rotation autour de $O_1 \vec{z_0}$ ⊕ mouvement de rotation autour de $C_2 \vec{x_1}$

$$E_c(2/0) = \frac{1}{2} m \|\vec{V}_{C_2,2/0}\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{2/0} [I_{C_2,2}] \vec{\Omega}(2/0)$$

$$= \frac{1}{2} m a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(B_2 + ma^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} A_2 \dot{\theta}_2^2$$

1

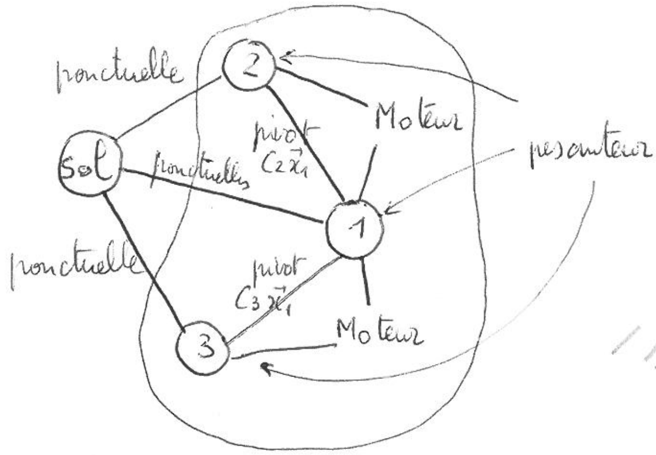
3) Par analogie $E_c(3/0) = \frac{1}{2}(B_2 + ma^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} A_2 \dot{\theta}_3^2$

soit $E_c(E/0) = \frac{1}{2}\left[C_1 + Mb^2 + 2B_2 + 2ma^2\right]\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} A_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} A_2 \dot{\theta}_3^2$

à partir de Q2.1 $E_c(E/0) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{C_1 + Mb^2 + 2B_2 + 2ma^2 + 2A_2 \frac{a^2}{r^2}}_{J}\right]\dot{\varphi}^2$

0,5

Q3_2 Puissance

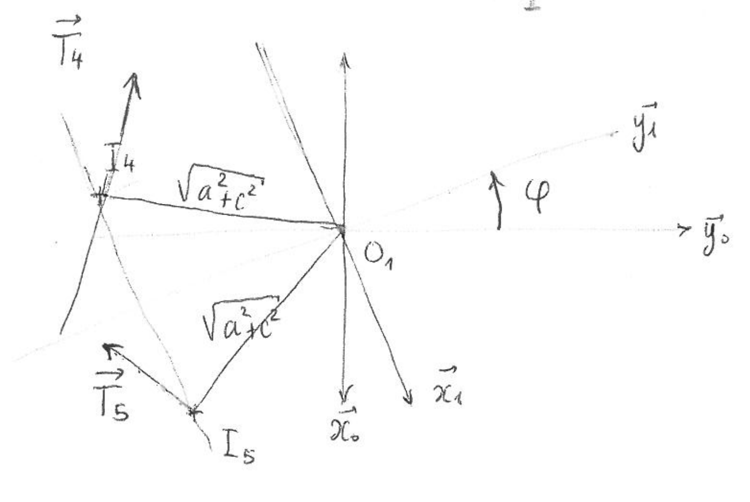


/1

Puissances extérieures :

- pesanteur : nulles car les vitesses des centres de gravité sont dans le plan horizontal
- ponctuelle sol_2 et sol_3 : nulles car roulement sans glissement (il n'y a pas de resistance au roulement : supposée negligeable)
- ponctuelle en I_4 $\quad -f' \cdot |N_4| \cdot \sqrt{a^2+c^2} \cdot \dot{\varphi}$
- ponctuelle en I_5 $\quad -f' |N_5| \sqrt{a^2+c^2}\, \dot{\varphi}$

/1



Puissances interieures

- pivots parfaites : nulles /1
- moteur 2 $\quad C_m \cdot \dot{\theta}_2$ $\qquad$ moteur 3 $\quad -C_m \cdot \dot{\theta}_3$ /1

$$\mathcal{P}_{AM} = -f' \cdot \sqrt{a^2+c^2} \cdot (N_4+N_5)\, \dot{\varphi} + 2\, C_m \frac{a}{R}\, \dot{\varphi}$$

Q3.4 Théorème de l'énergie cinétique

$$\mathcal{P}_{ext \rightarrow E, R_0} + \mathcal{P}_{int} = \frac{d\,Ec(E/_0)}{dt}$$

$$-(T_4 + T_5)\sqrt{a^2+c^2}\,\dot{\varphi} + 2C_m \frac{a}{r}\dot{\varphi} = J.\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi}$$

$$C_m = \frac{r}{2a}\left\{ J\ddot{\varphi} + \sqrt{a^2+c^2}\,(T_4 + T_5)\right\}$$

/2