INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Département de Sciences et Techniques Pour l'Ingénieur

3[e]A Pré-Orientation Ingénierie de la Construction

Examen de **Mécanique du Solide**

Durée 1h30' aucun document autorisé *Février 2015*

Support : système à excentrique

PRESENTATION

On considère un système à excentrique permettant de transformer un mouvement de rotation autour d'un axe fixe en un mouvement de translation alternatif selon un axe perpendiculaire à l'axe de rotation. L'objectif de cette étude est de mettre en évidence le compromis pour l'ingénieur du choix de la raideur du ressort permettant de maintenir le contact entre l'excentrique et le poussoir au cours du mouvement. Ce type de système est largement utilisé sur les moteurs à pistons, figure 1 gauche, pour commander la levée des soupapes d'admission et d'échappement.

HYPOTHESES ET DONNEES

Le système étudié est constitué (figure 1) :

- ✓ D'un excentrique rigide (1) de rayon $CI = R$, excentré d'une valeur $e = OC$. L'excentrique 1 auquel est associé le repère $R_1\{O;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1\}$ est en rotation de paramètre $\theta = (\vec{x}_0,\vec{x}_1)$ selon l'axe $O\,\vec{z}_0$ par rapport au support (0) supposé galiléen auquel est associé le repère $R_0\{O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\}$.
  La masse du solide 1 est notée m_1 et son centre de gravité est confondu avec le point C. L'excentrique (1) est guidé par rapport au support (0) en combinant une liaison rotule (sphère-sphère) en B et une liaison linéaire annulaire (sphère-cylindre) d'axe $O\vec{z}_0$ en D (figure 2). Les liaisons sont supposées parfaites. L'excentrique 1 est entrainé et rotation par rapport au support 0 à <u>vitesse de rotation supposée constante</u> $\dot{\theta} = \omega$ par application d'un couple moteur couple moteur C_m selon l'axe $O\,\vec{z}_0$.
- ✓ un poussoir (2) en liaison glissière d'axe $O\vec{y}_0$ (figure 1) et de paramètre d'espace $y = \|O\vec{A}\|$ par rapport au support (0). Cette liaison est supposée parfaite. La masse du poussoir est notée m_2 et son centre de gravité G_2 est situé sur l'axe $O\,\vec{y}_0$. Le poussoir (2) est en contact ponctuel avec l'excentrique (1) en I. Le contact, de normale $\vec{y}_0$ s'opère avec frottement de coefficient *f*. Le torseur de l'action de contact de l'excentrique (1) sur le poussoir (2) réduit en I est noté :

$$[F_{12}]_I = \begin{bmatrix} T_{12}\vec{x}_0 + N_{12}\,\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{bmatrix}_I$$

- ✓ Un ressort hélicoïdal (3) d'axe $O\,\vec{y}_0$ dont une des extrémités s'appuie sur le poussoir (1) en A et l'autre sur le support 0. L'effort exercé par le ressort (3) sur le poussoir s'exprime par $F_{r3\,2}\,\vec{y}_0$ avec $F_{r3\,2} = -(a + k\,y)$ où *a* et *k* sont des coefficients positifs.

QUESTIONS

<u>PARTIE 1</u> : *On cherche ici à déterminer la force de pré-charge du ressort pour éviter le décollement au contact entre le poussoir et l'excentrique (Voir Figure 3)*

1-1 Déterminer la relation liant les paramètres d'espace y et θ. La vérifier pour $\theta = 0;-\pi/2$ et $\pi/2$.

1-2 En considérant que l'effort de pré-charge initial noté F_{r0} et qui s'applique pour $\theta = -\pi/2$ (Voir Figure 3), déterminer le coefficient a qui apparait dans l'expression de l'effort du ressort $F_{r3/2}$.

1-3 Isoler le poussoir (2) et préciser quelle équation du Principe Fondamental de la Dynamique ne fait pas intervenir les inconnues de liaison entre le poussoir (2) et le support (0).

1-4 Ecrire cette équation en fonction de la composante d'effort N_{12}.

1-5 Ecrire la condition de non décollement au point de contact I entre l'excentrique (1) et le poussoir (2) et en déduire une condition sur la précontrainte du ressort F_{r0}.

1-6 Application numérique. La vitesse de rotation de l'excentrique (1) par rapport au support (0) est égale à *2000 tr/min*. La masse totale du poussoir (2) est $m_2=200g$, L'excentration e est égale à 12mm. Le ressort a une raideur $k = 0.5\,daN\,mm^{-1}$ On prend g=10m/s². Montrer que l'on peut négliger le poids de (2) et donner la pré-charge F_{r0} minimale du ressort qui permet d'éviter le décollement (on se placera dans un cas défavorable)

<u>PARTIE 2</u> *On cherche ici à déterminer l'influence de la force de pré-charge du ressort sur la puissance dissipée au point de contact I entre l'excentrique (1) et le poussoir (2) ainsi que sur le couple moteur $C_{m0\,1}$.*

2-1 En se basant sur la figure 2 représentant l'excentrique (1), justifier que la matrice d'inertie de l'excentrique (1) peut se mettre sous la forme :

$$[I_{O,B1}(1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

2-2 Isoler l'ensemble {1;2} et calculer l'énergie cinétique galiléenne (c'est à dire dans le mouvement par rapport à R_0) en fonction des paramètres $\dot{y}$ et $\dot{\theta}$.

2-3 Déterminer la puissance développée par les actions extérieurs à l'ensemble {1;2} dans le mouvement par rapport à R_0. On supposera que l'effort du ressort $F_{r3/2}$ peut être considéré constant pour simplifier, en négligeant le terme élastique, ce qui donne alors $F_{r3/2} = F_{r0}$.

2-4 Déterminer la puissance développée par les efforts intérieurs à l'ensemble {1;2} dans le mouvement par rapport à R_0. On conservera l'hypothèse simplificatrice de la question 2.3 et on montrera que la vitesse de glissement au point I est égale à : $\vec{V}_{I\in 2\,1} = (R + e\sin\theta)\,\dot{\theta}\,\vec{x}_0$.

2-5 Déterminer l'expression du couple moteur $C_{m0/1}$.

2-6 Identifier les termes faisant intervenir la pré-charge F_{r0} du ressort dans l'expression de ce couple et indiquer dans quel sens ils influent.

PARTIE 3 *On cherche désormais à déterminer l'influence de la pré-charge du ressort et de la répartition des masses sur les efforts de liaison en B et D.*

Suite à un mauvais équilibrage dynamique, la répartition de la masse de l'excentrique (1) conduit en réalité à une forme de la matrice d'inertie possédant un terme de produit d'inertie non nul :

$$[I_{O,B1}(1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

3.1 Déterminer le torseur dynamique $\vec{\delta}_O(1/0)$ de l'excentrique (1) dans son mouvement par rapport au repère R_0, réduit au point O. On rappelle que l'excentrique (1) tourne à vitesse constante par rapport au support (0).

3.2 Appliquer le PFD à l'excentrique (1) et déduire les actions mécaniques qui lui sont appliquées par le support (0) à travers les liaisons B et D (les expressions de N_{12} et T_{12} s'appuieront sur l'hypothèse de la partie 2 : $F_{r32} = F_{r0}$.

3.3 Identifier les termes faisant intervenir la pré-charge F_{r0} du ressort et indiquer dans quel sens ils influent sur les composantes des actions mécaniques de liaison

3.4 Identifier l'équation donnant le couple moteur. En comparant avec l'expression trouvée en 2-5, conclure sur l'influence du produit d'inertie D_1 sur le couple moteur.

Formulaire Mécanique du Solide

Torseur en un point A :

$$[T]_{A,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vec{R} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} & \vec{M}_A = \begin{vmatrix} L \\ M \\ N \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}_A \quad \text{avec } \vec{M}_{A[T]} = \vec{M}_{B[T]} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{[T]}$$

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$[C_{S/\mathcal{R}}] = [\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad , \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}]_A \text{ avec } \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S/\mathcal{R})} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}(A \in S_2/S_0) = \vec{V}(A \in S_2/S_1) + \vec{V}(A \in S_1/S_0)$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$[F_{Ext/S}]_A = [\mathcal{D}(S/\mathcal{R})]_A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{R}_{[F_{ext}/S]} = m\,\vec{\Gamma}(G \in S/\mathcal{R}) \\ \vec{M}_{A[F_{ext}/S]} = \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}} + m\,\vec{V}(A/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(G \in S/\mathcal{R})$$

où :

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = [I_{A,\mathcal{B}}(S)]\,\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m\,\vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) \qquad \text{avec } A \in S$$

et

$$[I_{A,\mathcal{B}}(S)] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ & \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm \\ & & \int_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

Théorème de Huygens

$$[I_{A,\mathcal{B}}(S)] = [I_{G,\mathcal{B}}(S)] + [I_{A,\mathcal{B}}(G,m(S))]$$

Puissance développée

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = [\vec{R}_{[F_{ext}/S]} \quad \vec{M}_{A[F_{ext}/S]}]_A \cdot [\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad \vec{V}(A \in S/\mathcal{R})]_A$$

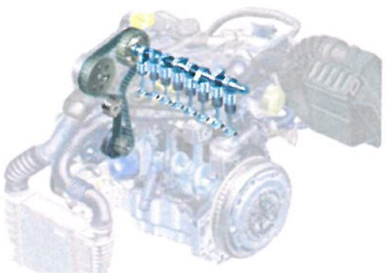
Energie cinétique

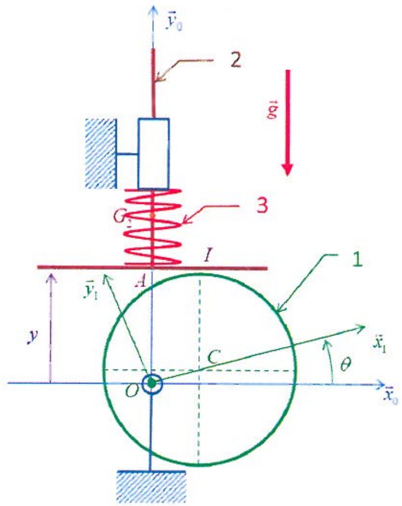
$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G \in S/\mathcal{R}) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot ([I_G(S)]\,\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}), \text{ si A est fixe, } \mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot ([I_A(S)]\,\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}})$$

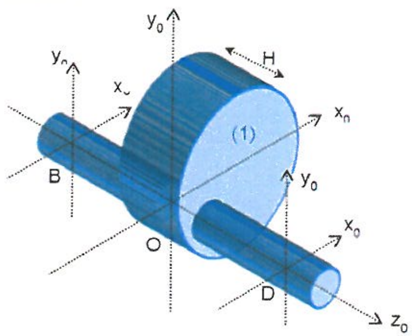
Théorème de l'Energie Cinétique

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_{\Sigma/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{Ext \to \Sigma/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{Int \to \Sigma/\mathcal{R}}$$

Figure 1







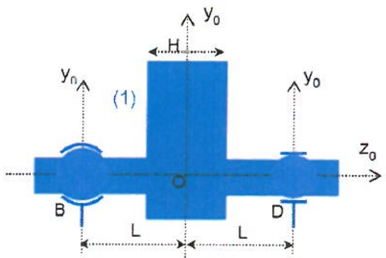
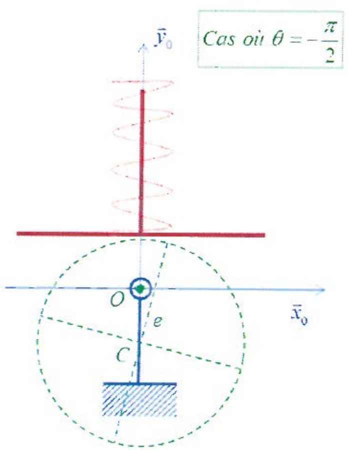


Figure 2



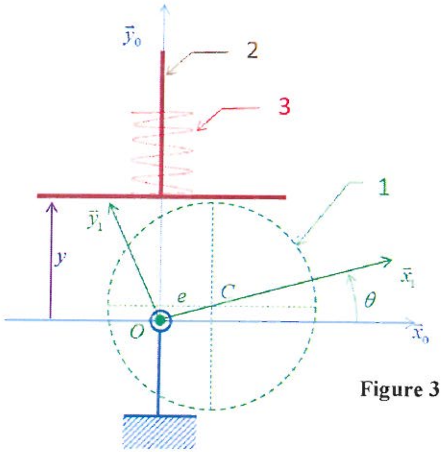


Figure 3