

Total /25

1.1  $\dot{\psi} = \text{constante}$   $\vec{OG} = -R \vec{y}_1$

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\varphi} \vec{x}_{23} + \dot{\theta} \vec{y}_{12} + \dot{\psi} \vec{z}_{01}$$

$$\vec{V}_{G,3/0} = \left. \frac{d\vec{OG}}{dt} \right|_0 = -R \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_0 = +R \dot{\psi} \vec{x}_1 \quad /2$$

1.2  $\left\{ \mathcal{L}_{i(3/0)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{c(3/0)} \\ \vec{\sigma}_{G(3/0)} \end{matrix} \right\}_G \leftarrow \vec{R}_{c(3/0)} = M \vec{V}_{G,3/0} = MR \dot{\psi} \vec{x}_1 \quad /0,5$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{B_3} \cdot \vec{\Omega}_{3/0}$$

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\psi} \vec{z}_1 + \dot{\varphi} \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \sin \varphi \\ \dot{\psi} \cos \varphi \end{pmatrix}_{B_3}$$

$$\vec{\sigma}_{G(3/0)} = \begin{pmatrix} A \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \sin \varphi \cdot B \\ C \dot{\psi} \cos \varphi \end{pmatrix}_{B_3} \quad /1,5$$

1.3  $\left\{ \mathcal{D}_{3/0} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_d(3/0) \\ \vec{\delta}_G(3/0) \end{matrix} \right\}_G \leftarrow \left. \frac{d\vec{R}_{c(3/0)}}{dt} \right|_0 = +MR \dot{\psi}^2 \vec{y}_1 \quad /0,5$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_{G,3/0}}{dt} \right|_0 + \left\{ \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{\sigma}_{G,3/0} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} A \ddot{\varphi} \\ B \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \varphi \\ -C \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \sin \varphi \\ \dot{\psi} \cos \varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A \dot{\varphi} \\ B \dot{\psi} \sin \varphi \\ C \dot{\psi} \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \ddot{\varphi} + (C-B) \dot{\psi}^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ B \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \varphi + (A-C) \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \varphi \\ -C \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \varphi + (B-A) \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix}_{B_3}$$

/1,5

# 1.4 on isole le navire

BAM ext

- pesanteur  $\rightarrow 3$   $- Mg \vec{z}_0$  en G
- effets aerodynamiques  $\left\{ \begin{array}{l} R_x - Mg k \sin \varphi \\ R_y \quad 0 \\ R_z \quad 0 \end{array} \right\}_{H, B_3}$
- propulsion  $\left\{ \begin{array}{l} F \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\}_{P, B_3}$

Torseurs en G \*  $- Mg \vec{z}_0 = - Mg (\cos \theta \vec{z}_2 - \sin \theta \vec{x}_2) = \begin{pmatrix} Mg \sin \theta \\ - Mg \cos \theta \sin \varphi \\ - Mg \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}_{B_3}$

\*  $\vec{M}_G = \vec{M}_H + \underbrace{\{ \vec{GH} \wedge \vec{R} \}}_{\text{aero}}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda R_y \\ -\lambda R_x \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_x \\ R_y \\ R_z \end{array} \right\} \begin{pmatrix} -Mg k \sin \varphi + \lambda R_y \\ -\lambda R_x \\ 0 \end{pmatrix}_{G, B_3}$$

\*  $\vec{M}_{G(\text{prop})} = \vec{M}_{P(\text{prop})} + \{ \vec{GP} \wedge F \vec{x}_3 \} = \begin{pmatrix} -L_0/2 \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda F \\ 0 \end{pmatrix}_{B_3}$

$\left\{ \begin{array}{l} a \\ G_{\text{ext} \rightarrow 3} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R_x + Mg \sin \theta + F \\ R_y - Mg \cos \theta \sin \varphi \\ R_z - Mg \cos \theta \cos \varphi \end{array} \middle| \begin{array}{l} -Mg k \sin \varphi + \lambda R_y \\ -\lambda R_x - \lambda F \\ 0 \end{array} \right\}_{G, B_3} \quad /3$

# 1.5

$\Sigma \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 3} = \vec{R}_d(3/0) \Leftrightarrow \begin{cases} R_x + Mg \sin \theta + F = 0 \\ R_y - Mg \cos \theta \sin \varphi = MR \dot{\psi}^2 \cos \varphi \\ R_z - Mg \cos \theta \cos \varphi = -MR \dot{\psi}^2 \sin \varphi \end{cases}$

$\Sigma \vec{M}_{G \text{ ext} \rightarrow 3} = \vec{\delta}_G(3/0) \Leftrightarrow \begin{cases} -Mg k \sin \varphi + \lambda R_y = A \ddot{\varphi} + (C-B) \dot{\psi}^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ -\lambda R_x - \lambda F = B \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \varphi + (A-C) \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 = (B-A-C) \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases} \quad /1$

avec  $\theta=0$  on peut poser  $\sin \theta=0$  et  $\cos \theta=1$

2.1  $\varphi = \varphi_s = \text{constante}$   
 $\dot{\varphi} = \text{cste}$

L'équation 4) donne  $-Mg k \varphi_s + \lambda R_y = (C-B) \dot{\varphi}^2 \cdot \varphi_s$

L'équation 2) donne  $R_y = Mg \cos \theta \cdot \varphi_s + MR \dot{\varphi}^2$

$$\Leftrightarrow [(C-B) \dot{\varphi}^2 + Mg(\lambda \cos \theta - k)] \varphi_s + \lambda MR \dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\varphi_s = \frac{M \lambda R \dot{\varphi}^2}{Mg(k - \lambda \cos \theta) + (C-B) \dot{\varphi}^2}$$

/1,5

2.2 Application numérique

La vitesse du bateau est  $V = R \cdot \dot{\varphi} \Rightarrow \varphi_s = \frac{M \lambda V^2 R}{Mg R^2 (k - \lambda) + (C-B) V^2}$  /0,5

$\uparrow$   $45 \cdot 10^{10}$        $\uparrow$   $45 \cdot 10^{13}$

En remplaçant par les valeurs  $\varphi_s \approx 0,07 \text{ rad}$  /0,5

" " " " " "  $2^\circ = 0,035 \text{ rad}$

2.3 L'angle  $\varphi_s$  est 2 fois supérieur à l'angle limite

Dans ces conditions, le navire ne peut assurer la mise en œuvre de l'aviation embarquée. /0,5

3.1 On reprend l'étude précédente

on isole la navire + le système COGITE

BAMext  $\left\{ \begin{array}{l} \text{identique au précédent 1.4} \\ \text{\textcircled{+} pivotant} \rightarrow \text{cogite} \quad -Mg \vec{z}_0 \text{ en } Q \end{array} \right.$

$$-Mg \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \sin \varphi_s \\ -mg \cos \varphi_s \end{pmatrix}_{B_3}$$

$$\vec{M}_G(\text{pivotant}) = \vec{GQ} \wedge -Mg \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_s \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \varphi_s \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg \cdot q_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_3}$$

/1

Calcul des grandeurs dynamiques

on rajoute une masse ponctuelle  $m$   $\vec{OQ} = -R \vec{y}_1 + q \vec{y}_3$   
 $= (-R + q \cos \varphi_s) \vec{y}_1 + q \sin \varphi_s \vec{z}_0$

La résultante dynamique supplémentaire est :

$$\vec{R}_d(\text{cogite}/o) = m(R - q_s \cos \varphi_s) \dot{\psi}^2 \vec{y}_1 \quad /1$$

Le moment dynamique de la masse ponctuelle en  $Q$  par rapport à  $G$  vaut :

$$\vec{S}_G(\text{cogite}/o) = \vec{GQ} \wedge \vec{R}_d(\text{cogite}/o) = q_s \vec{y}_3 \wedge \{ m(R - q_s \cos \varphi_s) \dot{\psi}^2 \vec{y}_1 \}$$

$$= -mq_s(R - q_s) \cdot \dot{\psi}^2 \sin \varphi_s \cdot \vec{x}_3 \quad /1$$

Les équations deviennent  $\left\{ \begin{array}{l} R_x + F = 0 \\ R_y - Mg \sin \varphi_s - mg \sin \varphi_s = MR \dot{\psi}^2 + m(R - q_s) \dot{\psi}^2 \\ R_z - Mg - mg = -MR \dot{\psi}^2 \sin \varphi_s - m(R - q_s) \dot{\psi}^2 \sin \varphi_s \\ -Mg k \varphi_s + \lambda R_y - mg q_s = -mq_s(R - q_s) \dot{\psi}^2 \cdot \varphi_s + (C - B) \dot{\psi}^2 \cdot \varphi_s \\ -\lambda R_x - \lambda F = 0 \\ (B - A - C) \dot{\psi} \dot{\varphi}_s = 0 \end{array} \right.$

3.2  $\varphi_s = 0$

l'équation 2) donne  $R_y = \{MR + m(R - q_s)\} \dot{\psi}^2$

l'équation 4) donne  $\lambda R_y = m g q_s$   $(R - q_s) \leq R$

d'où

$$\lambda(M+m)R\dot{\psi}^2 = m(g + \lambda\dot{\psi}^2)q_s$$

$$q_s = \frac{\lambda(M+m)R\dot{\psi}^2}{m(g + \lambda\dot{\psi}^2)}$$

$$V = R\dot{\psi} \Rightarrow \dot{\psi}^2 = \frac{V^2}{R^2}$$

$$q_s = \frac{\lambda(M+m)R \cdot V^2}{m(gR^2 + \lambda V^2)} \quad /1$$

L'application numérique donne  $q_s = \frac{6 \cdot 45 \cdot 10^6 \cdot 500 \cdot 36}{22 \cdot 10^3 (9,81 \cdot 500^2 + 6 \cdot 36)}$

$$q_s \approx 90 \text{ m}$$

La valeur maximale de  $q$  est égal à 16 m, la condition  $\varphi_s = 0$  ne peut être vérifiée. /1

3.3 Pour  $q_s = 16 \text{ m}$ , on calcule la vitesse  $V_M$

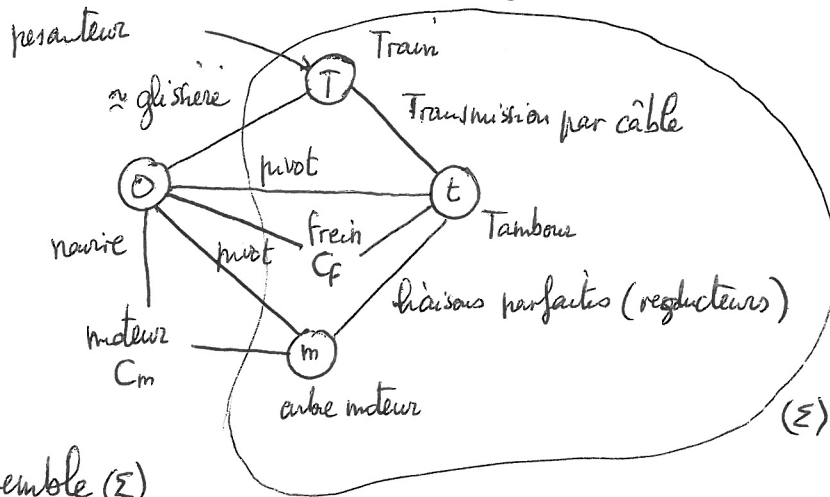
$$\lambda(M+m)R V_M^2 = m(gR^2 + \lambda V_M^2)q_s$$

$$V_M^2 \{ \lambda(M+m)R - q_s \lambda m \} = m g \cdot R^2 - q_s$$

$$V_M^2 \approx \frac{m \cdot g \cdot R^2 - q_s}{\lambda M \cdot R} \approx \frac{m g \cdot R \cdot q_s}{\lambda M}$$

$$V_M = 2,55 \text{ m/s} \quad /1$$

## 4.1 Calcul de l'énergie cinétique du système



on isole l'ensemble  $(\Sigma)$

$$E_c(\Sigma/o) = E_c(m) + E_c(t) + E_c(T)$$

$\uparrow$  rotation  $\quad \uparrow$  rotation  $\quad \nwarrow$  translation  $\frac{1}{2} m \dot{q}^2$   
 $\frac{1}{2} J_m \omega_m^2 \quad \frac{1}{2} J_t \omega_t^2$

$$E_c(\Sigma/o) = \frac{1}{2} J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_t \omega_t^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

$\omega_t = N \cdot \omega_m$   
 $\dot{q} = r \cdot \omega_t = r \cdot N \cdot \omega_m$

$$= \frac{1}{2} \left\{ J_m (r \cdot N)^2 + J_t (r)^2 + m \right\} \dot{q}^2$$

$$E_c(\Sigma/o) = \frac{1}{2} M_{eq} \cdot \dot{q}^2 \quad \text{avec } M_{eq} = \left( \frac{J_m}{r^2 N^2} + \frac{J_t}{r^2} + m \right)$$

/2

## 4.2 On isole l'ensemble $(\Sigma)$

BAM est et est

pivot  $\rightarrow \Sigma : P_{\text{pivot}} = 0$  (ne travaille pas :  $\Sigma$  à l'horizontale)  
 liaisons parfaite  $P_{\text{liaison}} = 0$   
 Moteur : couple nul  $P_{\text{mot}} = 0$   
 Frein :  $C_f \vec{x}_3 \quad P_{\text{frein}} = C_f \cdot \omega_t < 0$

$$\text{d'où } \sum P_{\text{ext} \rightarrow \Sigma/o} + P_{\text{int}} = \frac{C_f}{r} \cdot \dot{q} \quad /2$$

### 4.3. T.E.C

$$\sum P_{ext \rightarrow \xi, i, 0} + P_{int} = \frac{dE_c(\xi, 0)}{dt}$$

$$\frac{C_f}{\pi} \dot{q} = M_{eq} \cdot \dot{q} \cdot \ddot{q} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q} = \frac{C_f}{\pi M_{eq}}$$

Le mouvement est uniformément décéléré d'où  $2 \cdot \Delta q \cdot \dot{q} = \dot{q}_0^2 - \dot{q}_N^2$

$$\ddot{q} = \frac{-\dot{q}_N^2}{2 \Delta q} \quad \text{ou} \quad \Delta q = -\frac{\dot{q}_N^2}{2 \ddot{q}} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{vitesse finale} = 0 \end{array}$$

$$\Delta q = \frac{\dot{q}_N^2 \cdot \pi \cdot M_{eq}}{2 |C_f|}$$

en remplaçant  $M_{eq}$

$$\Delta q = \frac{\dot{q}_N^2 \pi}{2 |C_f|} \cdot \left\{ \frac{J_m}{\pi^2 N^2} + \frac{J_E}{\pi^2} + m \right\} \quad / 2$$