

Examen d'équations aux dérivées partielles

Durée : 1h30

Les appareils électroniques sont interdits ainsi que les notes de cours, TD et TP. Les questions sont toutes indépendantes.

Dans tout le problème, on s'intéresse à la résolution de l'équation de la chaleur sur l'intervalle $[0, L]$:

$$\partial_t u(t, x) - D \partial_{xx} u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, L] \quad (1)$$

munie des conditions aux limites

$$u(t, 0) = 0, \quad \partial_x u(t, L) = 0, \quad t \in]0, T] \quad (2)$$

et de la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, L] \quad (3)$$

où D est une constante strictement positive et $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ est donnée.

Questions

1) Montrez que le problème (1)–(3) admet au plus une solution $u \in C^2([0, T] \times [0, L])$. On justifiera bien les différentes étapes du raisonnement.

2) Déterminez les valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ et les fonctions propres $\{\phi_n(x)\}_{n \geq 1}$ du problème aux valeurs propres associé à (1)–(2), c'est-à-dire :

$$-D \phi''(x) = \lambda \phi(x), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(L) = 0.$$

On se servira sans démonstration du fait que les valeurs propres sont des réels strictement positifs. Montrez que l'on peut normaliser les fonctions ϕ_n pour qu'elles forment une base orthonormale de $L^2(0, L)$.

Indication : vous êtes sensé obtenir : $\lambda_n = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 D}{4L^2}, n \in \mathbb{N}^*$

3) Utilisant le fait que les ϕ_n forment une base orthonormale de $L^2(0, L)$, on cherche la solution $u(t, x)$ du problème (1)–(3) sous la forme

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) \quad (4)$$

où les fonctions $a_n(t)$ sont des fonctions C^1 sur $[0, T]$. En injectant (4) dans (1), montrez formellement que les a_n vérifie les équations différentielles suivantes :

$$a'_n(t) = -\lambda_n a_n(t), \quad t \in [0, T]$$

Montrez également que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n(0) = \int_0^L u_0(x) \phi_n(x) dx$$

et en déduire l'expression des $a_n(t)$.

On applique maintenant la méthode des différences finies pour calculer une solution approchée du problème (1)–(3). On discrétise la variable d'espace x avec un pas Δx et la variable de temps avec un pas Δt . Le schéma explicite usuel pour résoudre l'équation (1) s'écrit :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - D \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad (5)$$

4) Montrer que ce schéma est d'ordre 2 par rapport à Δx et d'ordre 1 par rapport à Δt .

5) En considérant dans un premier temps que le schéma (5) est valable pour tout $i \in \mathbb{Z}$, montrer en vous servant de la méthode de Von Neumann qu'il est stable si et seulement si Δt vérifie la condition :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}$$

6) En réalité le schéma (5) n'est valable que pour $i = 1 \dots I - 1$ où I vérifie la relation $I\Delta x = L$. En $i = 0$ et en $i = I$, les conditions aux limites (3) se traduisent par :

$$u_0^n = 0 \quad \text{et} \quad u_I^n = u_{I-1}^n, \quad n = 1, \dots, N \quad (6)$$

Pour montrer la stabilité du schéma (5) associé aux conditions aux limites (6) on va montrer que :

$$\max_{i=0 \dots I} |u_i^{n+1}| \leq \max_{i=0 \dots I} |u_i^n| \quad (7)$$

Pour cela écrivez le schéma (5) sous la forme :

$$u_i^{n+1} = \alpha u_{i-1}^n + \beta u_i^n + \gamma u_{i+1}^n$$

où α , β et γ sont des coefficients dont vous donnerez l'expression en fonction de Δt , Δx et D . Sous quelle condition sur Δt sont ils tous positifs ? En remarquant que leur somme vaut 1 et en tenant compte des conditions aux limites (6), en déduire que, si $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}$, le schéma (5)-(6) vérifie la condition (7).

7) (Question de cours). Rappelez les deux conditions que doit vérifier un schéma linéaire aux différences finies pour qu'il soit convergent. Sur quel théorème reposent ces conditions ?

Rappel de la formule de Taylor. Soit u une fonction à valeurs réelles de classe C^k sur $I = [a, b]$. Alors $\forall n < k, x_0 \in]a, b[, \Delta x \in \mathbb{R}, x_0 + \Delta x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x) &= u(x_0) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0) + \dots \\ &+ \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x_0) + \mathcal{O}(\Delta x)^{n+1} \end{aligned}$$