TD 1 – Exercices sur le chapitre 1

Laplacien, formules de Green et décomposition spectrale

Notations et hypothèses communes. Dans tous les exercices, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^q$ ($q \geq 1$) de frontière $\partial\Omega$ régulière, et $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_q)$ la normale unitaire *sortante* à $\partial\Omega$. Pour une fonction u régulière sur $\bar{\Omega}$, on note $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \vec{\nabla} u \cdot \mathbf{n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, n_i$ la dérivée normale de u sur $\partial\Omega$.

L'espace $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(\mathrm{x})\, \overline{v(\mathrm{x})}\, d\mathrm{x}.$$

Enfin, f désigne une fonction régulière de Ω dans $\mathbb{R}$ et g une fonction régulière de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.

Soit $q \geq 2$.

1) Rappelons la formule d'Ostrogradski (ou formule de la divergence) : pour tout champ de vecteurs $\vec{F} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^q)$,

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, d\mathrm{x} = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

En l'appliquant à un champ de vecteurs bien choisi, démontrer que pour tous $u, v \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, on a la formule d'*intégration par parties dans* $\mathbb{R}^q$:

$$\int_\Omega u\, \frac{\partial v}{\partial x_i}\, d\mathrm{x} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\, d\mathrm{x} + \int_{\partial\Omega} u\, v\, n_i\, dS. \tag{1}$$

2) Justifier que (1) reste vraie pour des fonctions à valeurs complexes. En déduire, pour tous $u, v \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{C})$, la *formule de Green*

$$\int_\Omega \left(\Delta u\, \bar{v} - u\, \overline{\Delta v}\right) d\mathrm{x} = \int_{\partial\Omega} \Big(\bar{v}\, \frac{\partial u}{\partial n} - u\, \frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\Big) dS, \tag{2}$$

puis montrer que si u et v sont nulles sur $\partial\Omega$:

$$\int_\Omega \Delta u\, \bar{v}\, d\mathrm{x} = \int_\Omega u\, \overline{\Delta v}\, d\mathrm{x}. \tag{3}$$

3) Réécrire (3) à l'aide du produit scalaire de $L^2(\Omega, \mathbb{C})$. Quelle propriété de l'opérateur Δ (avec condition de Dirichlet homogène) traduit-elle ? En déduire que les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet homogène sont toutes réelles.

4) Montrer de plus que ces valeurs propres sont strictement positives. *Indication : pour une fonction propre ϕ, calculer $\langle -\Delta\phi, \phi \rangle$ à l'aide de* (1).

Exercice 2.

On s'intéresse au problème de Dirichlet suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ u & = & g & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4}$$

On note $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet homogène et $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de fonctions propres réelles associées, c'est-à-dire vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\phi_k & = & \lambda_k\phi_k & \text{dans } \Omega, \\ \phi_k & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{5}$$

On rappelle le résultat du cours : pour F régulière, la solution du problème $-\Delta w = F$ dans Ω, $w = 0$ sur $\partial\Omega$, s'écrit $w = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle F, \phi_k \rangle \, \phi_k$.

En utilisant ce résultat, montrer que la solution de (4) s'écrit

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \, \phi_k \qquad \text{avec} \qquad u_k = -\frac{1}{\lambda_k} \int_{\partial\Omega} g \, \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \, dS.$$

Indication : on admettra l'existence d'une fonction $v \in C^2(\bar{\Omega})$ telle que $v = g$ sur $\partial\Omega$ (un « relèvement » de g) et on considérera $\tilde{u} = u - v$.

On se contentera d'une démonstration formelle : on ne cherchera ni à justifier que les fonctions manipulées sont assez régulières pour appliquer les formules d'intégration par parties, ni à justifier la convergence des séries de fonctions.

Exercice 3.

Déterminer les valeurs propres et les fonctions propres (normalisées dans $L^2(0, L)$) de l'opérateur $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ sur $]0, L[$ associé aux conditions aux limites de Neumann homogènes :

$$\frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(L) = 0.$$

On commencera par montrer, en s'inspirant de l'exercice 1, que les valeurs propres sont réelles et positives ou nulles. Comparer avec le cas des conditions de Dirichlet traité en cours.

Exercice 4.

On pose $\Omega =]0, L[\times]0, H[$. Déterminer les valeurs propres et les fonctions propres (normalisées dans $L^2(\Omega)$) de l'opérateur

$$-\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

associé aux conditions de Dirichlet homogènes sur le bord du rectangle :

$$\forall x \in [0, L], \; u(x, 0) = u(x, H) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall y \in [0, H], \; u(0, y) = u(L, y) = 0.$$

On cherchera les fonctions propres sous la forme à variables séparées $\phi(x, y) = \alpha(x) \, \beta(y)$ et on montrera que l'on se ramène à deux problèmes monodimensionnels déjà résolus en cours. Les valeurs propres obtenues sont-elles nécessairement simples ?

Exercice 5.

Soient a_{ij}, $1 \leq i, j \leq q$, des fonctions de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ à valeurs réelles, et $A(\mathrm{x})$ la matrice de coefficients $a_{ij}(\mathrm{x})$. On suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathrm{x} \in \bar{\Omega},\ \forall (i,j) \in \{1,\ldots,q\}^2, \qquad a_{ij}(\mathrm{x}) = a_{ji}(\mathrm{x}) \quad \text{(symétrie)}, \\ \\ \forall \mathrm{x} \in \bar{\Omega},\ \forall \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_q) \in \mathbb{R}^q, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}(\mathrm{x})\,\xi_i\,\xi_j \ \geq\ \alpha\,|\xi|^2 \quad \text{(uniforme ellipticité)}, \end{array} \right. \tag{6}$$

où $\alpha > 0$ est une constante et $|\xi| = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_q^2)^{1/2}$. On s'intéresse au problème :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \displaystyle -\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & g & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{7}$$

On note $\mathcal{L}$ l'opérateur $u \longmapsto -\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$.

1) Exprimer $\mathcal{L}$ à l'aide des opérateurs div, $\vec{\nabla}$ et de la matrice A. Que retrouve-t-on lorsque A est la matrice identité ?
2) En vous inspirant de la démonstration d'unicité pour l'équation de Poisson, montrer que le problème (7) possède au plus une solution dans $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$.
3) Montrer que l'opérateur $\mathcal{L}$, défini sur $D = \{u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{C}) \ :\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, est auto-adjoint et défini positif pour le produit scalaire de $L^2(\Omega, \mathbb{C})$. Qu'en déduit-on pour ses valeurs propres ?