TD 2 – Exercices sur le chapitre 2

Équations d'évolution : méthodes d'énergie et méthode spectrale

Notations et hypothèses communes. Dans les exercices 1 et 2, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$ régulière, de normale unitaire sortante n, et $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. Les opérateurs $\vec{\nabla}$, div et Δ portent uniquement sur la variable d'espace x. On se donne f une fonction régulière de $\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, g une fonction régulière de $\mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$ dans $\mathbb{R}$, u_0 une fonction régulière de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, et k un réel strictement positif (coefficient de diffusion).

Exercice 1.

Équation de la chaleur. Démontrer qu'il existe au plus une solution $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega}, \mathbb{R})$ du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\mathrm{x}) - k\,\Delta u(t,\mathrm{x}) & = & f(t,\mathrm{x}), & (t,\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ u(t,\mathrm{x}) & = & g(t,\mathrm{x}), & (t,\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,\mathrm{x}) & = & u_0(\mathrm{x}), & \mathrm{x} \in \Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

Exercice 2.

Équation de convection-diffusion. Soit $\mathrm{x} \mapsto \vec{v}(\mathrm{x})$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ (par exemple la vitesse d'un fluide) vérifiant

$$\forall \mathrm{x} \in \Omega, \qquad \operatorname{div} \vec{v}(\mathrm{x}) = 0 \qquad \text{(écoulement incompressible)}.$$

Démontrer qu'il existe au plus une solution $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega}, \mathbb{R})$ du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\mathrm{x}) + \vec{v}(\mathrm{x}) \cdot \vec{\nabla} u(t,\mathrm{x}) - k\,\Delta u(t,\mathrm{x}) & = & f(t,\mathrm{x}), & (t,\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ u(t,\mathrm{x}) & = & g(t,\mathrm{x}), & (t,\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,\mathrm{x}) & = & u_0(\mathrm{x}), & \mathrm{x} \in \Omega. \end{array} \right. \tag{2}$$

Indication. On utilisera la même méthode que pour l'exercice 1, et l'on montrera que, pour toute fonction w régulière :

$$w\,\vec{v} \cdot \vec{\nabla} w = \frac{1}{2}\,\vec{v} \cdot \vec{\nabla}(w^2) \qquad \text{et} \qquad \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(w^2) = \operatorname{div}\left(w^2\,\vec{v}\right).$$

Exercice 3.

Équation des ondes (corde vibrante). Soient $L > 0$ et $c > 0$ (vitesse de propagation des ondes). On considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & = & f(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,L[, \\ u(t,0) = u(t,L) & = & 0, & t \in \mathbb{R}^+, \\ u(0,x) & = & u_0(x), & x \in]0,L[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) & = & u_1(x), & x \in]0,L[, \end{array} \right. \tag{3}$$

où f est une fonction régulière sur $\mathbb{R}^+ \times [0,L]$, et où la position initiale u_0 et la vitesse initiale u_1 sont des fonctions régulières sur $[0,L]$, compatibles avec les conditions aux limites : $u_0(0) = u_0(L) = u_1(0) = u_1(L) = 0$. Pour une solution u, on définit l'*énergie*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2 \right] dx.$$

1) **Conservation de l'énergie et unicité.**

a) Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times [0,L], \mathbb{R})$ une solution de (3) avec $f = 0$. Montrer que E est constante. *Indication : multiplier l'équation par $\partial u/\partial t$ et intégrer sur $]0,L[$.*

b) En déduire que le problème (3) admet au plus une solution dans $C^2(\mathbb{R}^+ \times [0,L], \mathbb{R})$.

2) **Résolution par la méthode spectrale.** On suppose dans la suite que $f = 0$. On rappelle (cours et TD 1) que les fonctions

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big), \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

sont les fonctions propres de $-\frac{d^2}{dx^2}$ sur $]0,L[$ avec conditions de Dirichlet homogènes, associées aux valeurs propres $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, et qu'elles forment une base hilbertienne de $L^2(0,L)$. Pour une solution u de (3), on pose

$$a_n(t) = \int_0^L u(t,x)\,\phi_n(x)\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

de sorte que, pour tout $t \geq 0$, $u(t,\cdot) = \sum_{n\geq 1} a_n(t)\,\phi_n$.

a) Montrer que chaque a_n vérifie l'équation différentielle $a_n''(t) + \omega_n^2\, a_n(t) = 0$, où l'on précisera $\omega_n > 0$.

b) Déterminer $a_n(0)$ et $a_n'(0)$ en fonction de u_0 et u_1.

c) En déduire l'expression de la solution u sous forme de série.

Comme au TD 1, on se contentera d'une démonstration formelle : on ne cherchera pas à justifier la convergence des séries, ni les dérivations terme à terme.

3) **Un exemple.** Calculer la solution lorsque $u_0(x) = \sin\big(\frac{\pi x}{L}\big)$ et $u_1(x) = \sin\big(\frac{2\pi x}{L}\big)$, et vérifier directement qu'elle convient. La solution est-elle périodique en temps ? Quelles sont, de façon générale, les fréquences de vibration possibles de la corde ? Commenter.

4) **Énergie et modes propres.** On rappelle (TD 1, exercice 3) que les fonctions $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}$ et $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\big(\frac{n\pi x}{L}\big)$, $n \in \mathbb{N}^*$, forment une base hilbertienne de $L^2(0,L)$.

a) Calculer les coefficients de $\frac{\partial u}{\partial x}(t,\cdot)$ et de $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)$ dans les bases $(\psi_n)_{n\geq 0}$ et $(\phi_n)_{n\geq 1}$ respectivement. En déduire, à l'aide de l'égalité de Parseval, que

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t) \qquad \text{avec} \qquad E_n(t) = \frac{1}{2}\left(a_n'(t)^2 + \omega_n^2\, a_n(t)^2\right).$$

b) Vérifier directement que chaque E_n est constante. Interpréter.