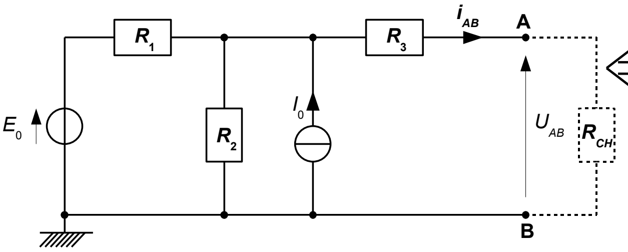
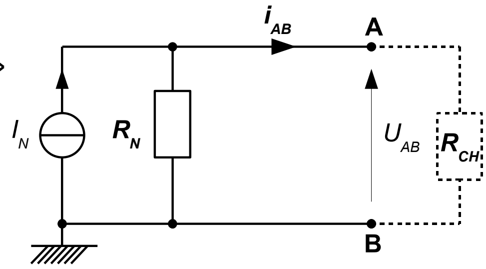
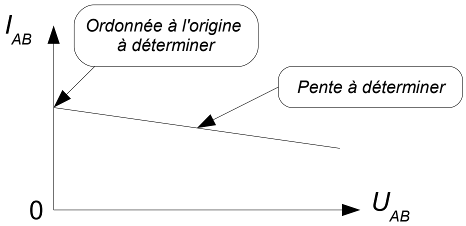
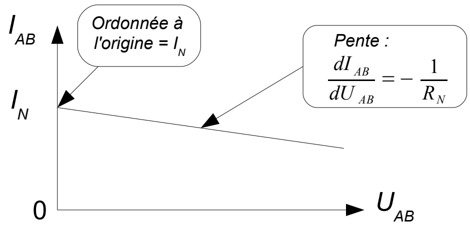
- Fiche de cours n°3 -
Théorème de Norton

I] Enoncé du théorème de Norton en régime continu :

« Tout circuit linéaire est équivalent à une source non idéale de courant. »
Sachant que :

- En régime continu (càd un régime pour lequel toutes les variables tensions et intensités sont constantes), un circuit linéaire est exclusivement composé d'éléments linéaires : sources de tension idéales, sources de courant idéales et résistances.
- La source non idéale de courant est composée d'une source idéale de courant (notée I_N), en parallèle avec une résistance interne (notée R_N). La résistance R_N modélise l'imperfection de cette source de courant.

Les deux figures ci-dessous illustrent l'équivalence entre le circuit linéaire étudié et le générateur de Norton équivalent :
NB : pour des raisons de lisibilité, nous avons choisi arbitrairement un exemple concret de cicuit linéaire. Tous les calculs seront menés sur la base de cet exemple, mais ceci n'enlève rien au caractère général de la démarche proposée.

 *Figure 1.A : le circuit linéaire à étudier.*	 *Figure 1.B : le générateur équivalent de Norton.*
Dans l'exemple considéré ci-dessus, le circuit linéaire étudié est composé d'une source idéale de tension, d'une source idéale de courant, et de trois résistances.	Le générateur équivalent de Norton est composé d'une source idéale de courant (notée I_N), en parallèle avec une résistance (notée R_N). La résistance de Norton R_N modélise l'imperfection de cette source de courant.
 *Figure 2.A : caractéristique tension/courant du circuit linéaire à étudier.*	 *Figure 2.B : caractéristique tension/courant du générateur équivalent de Norton.*
Dans la figure 2.A, l'ordonnée à l'origine et la pente sont à déterminer en fonction des éléments qui composent le circuit.	Dans la figure 2.B, l'ordonnée à l'origine et la pente sont données par l'équation $I_{AB} = I_N - \dfrac{U_{AB}}{R_N}$.

Dire que les deux circuits sont équivalents revient à dire que leurs caractéristiques tension/courant sont identiques. En particulier, leurs ordonnées à l'origine et leur pentes doivent être égales. Ceci implique que lorsque l'on place les deux circuits dans des conditions de fonctionnement identiques, ceux-ci doivent réagir de manière identique, en donnant le même point de fonctionnement (U_{AB}, I_{AB}).

II] Détermination des éléments du générateur équivalent de Norton :

Pour déterminer I_N et R_N, nous allons utiliser la propriété d'équivalence des deux circuits. Nous allons placer les deux circuits dans des conditions identiques, et ceux-ci vont se comporter de manière identique en fournissant le même courant I_{AB} à leur sortie.

II.1] Détermination de I_N :

Pour déteminer l'expression de I_N, on réalise un essai en court-circuit, càd qu'on relie les points A et B par un fil. Ceci entraîne obligatoirement que U_{AB}= 0 pour les deux circuits. Menons à présent les calculs en parallèle dans les deux cas :

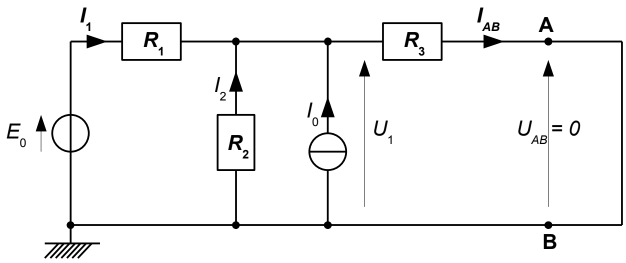
<table>
<tr>
<td>

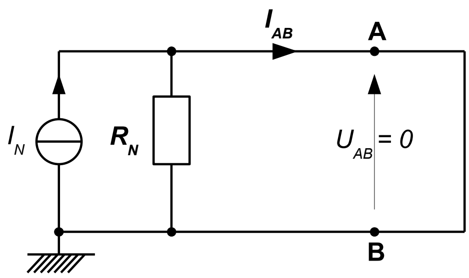
Figure 3.A : essai en court-circuit du circuit étudié.</td>
<td>

Figure 3.B : essai en court-circuit du générateur équivalent de Norton.</td>
</tr>
<tr>
<td>Essai à vide du circuit étudié :
$U_{AB}=0$
I_{AB} à déterminer.
L'application des lois de l'électrocinétique nous donne :
$U_1 = U_{AB}+R_3\cdot I_{AB} = R_3\cdot I_{AB}$
$I_{AB} = I_0+I_1+I_2$
$I_1 = \frac{E_0-U_1}{R_1}$
$I_2 = \frac{-U_1}{R_2}$
Après simplification des équations, nous obtenons :
$I_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2+R_1 R_3+R_2 R_3}\cdot I_0 + \frac{R_2}{R_1 R_2+R_1 R_3+R_2 R_3}\cdot E_0$</td>
<td>Essai à vide du générateur équivalent de Norton :
$U_{AB}=0$
$I_{AB} = I_N - \frac{U_{AB}}{R_N} = I_N$
$I_{AB}= I_N$</td>
</tr>
</table>

Il ne reste plus qu'à identifier les deux égalités afin d'obtenir l'expression de I_N.

$$I_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2+R_1 R_3+R_2 R_3}\cdot I_0 + \frac{R_2}{R_1 R_2+R_1 R_3+R_2 R_3}\cdot E_0$$

II.2] Détermination de R_N :

Pour déteminer l'expression de R_N, il suffit d'éteindre les sources indépendantes de tension et de courant, sachant que :

- éteindre une source de tension revient à la remplacer par un fil (ex dans notre cas : E_0= 0),
- éteindre une source de courant revient à la remplacer par un interrupteur ouvert (ex dans notre cas : I_0= 0).

NB : les sources indépendantes sont des sources dont la force électromotrice ou le courant électromoteur sont indépendants de tout paramètre du circuit. Inversement, les sources liées sont des sources dont la force électromotrice ou le courant électromoteur dépendent de l'un des paramètres (tension ou courant) du circuit. Lors de la détermination de R_N, les sources liées ne doivent pas être éteintes.

Si nous appliquons cette méthode au circuit à étudier, nous obtenons :

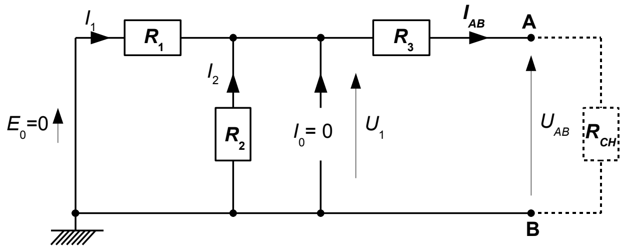
<table>
<tr>
<td>


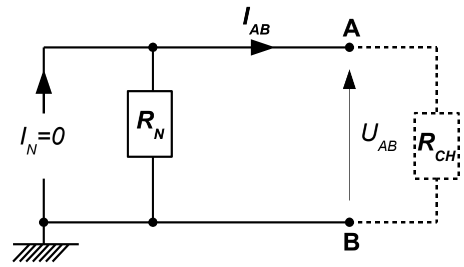
Figure 4.A : le circuit étudié avec toutes les sources éteintes.
</td>
<td>


Figure 4.B : le générateur équivalent de Thévenin avec E_{TH} éteinte.
</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$I_{AB} = I_1 + I_2 = -\frac{U_1}{R_1} - \frac{U_1}{R_2}$$

$$I_{AB} = \frac{U_1 - U_{AB}}{R_3}$$

D'après les deux équations précédentes, il vient :

$$-\frac{U_{AB}}{I_{AB}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$
</td>
<td>

$$I_{AB} = -\frac{U_{AB}}{R_N}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{U_{AB}}{I_{AB}} = R_N$$
</td>
</tr>
</table>

Il ne reste plus qu'à identifier les deux expressions de $-\frac{U_{AB}}{I_{AB}}$, pour trouver :

$$R_N = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

---

*III] **<u>Généralisation du théorème de Norton au cas des régimes variables</u>** :*

Le théorème de Norton tel qu'il vient d'être présenté peut être généralisé dans le cas des circuits linéaires fonctionnant en régime variable. Dans ce cas, on remplacera la notion de résistance par celle d'impédance complexe.

Les circuits linéaires (en régime variable) sont les circuits dont le fonctionnement est régi par une équation différentielle linéaire. Ces circuits peuvent comporter :

- des sources de tension et de courant variables,
- des sources de courant et de tension continues,
- des éléments passifs linéaires : résistances, inductances et capacités.

Le cas le plus fréquemment rencontré parmi l'ensemble des régimes variables est le régime sinusoïdal. Dans ce cas, le circuit étudié peut comporter des sources de courant et de tension sinusoïdales.
Pour traiter ce cas, la démarche présentée dans les paragraphes I et II reste valable. Il suffit juste d'utiliser la transformation complexe :

- Les sources de tension de la forme $e(t)=E_M \cdot \cos(\omega t+\phi_e)$, seront remplacée par leur transformée complexe, de la forme : $\underline{e}(j\omega t)=E_M \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\phi_e}$,
- Les sources de courant de la forme $I(t)=I_M \cdot \cos(\omega t+\phi_I)$, seront remplacée par leur transformée complexe, de la forme : $\underline{I}(j\omega t)=I_M \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\phi_I}$,
- les éléments passifs linéaires, R, L et C seront remplacés par leur impédance complexe R, $jL\omega$ et $\frac{1}{jC\omega}$,
- Le générateur de tension équivalent de Norton, de la forme $I_N(t)=I_N \cdot \cos(\omega t+\phi_N)$, sera remplacé par sa transformée complexe $\underline{I_N(j\omega t)}=I_N \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\phi_N}$,
- et enfin, au lieu de présenter une résistance interne R_N, le générateur équivalent de Norton présentera une impédance interne équivalente, notée $\underline{Z_N(j\omega)}$.

A partir de là, la méthode reste inchangée :

1. On détermine $\underline{I_N(j\omega t)}$ par un essai à vide.
2. On détermine $\underline{Z_N(j\omega)}$ en éteignant les sources de tension et de courant indépendantes (mais en conservant les sources liées).

IV] L'équivalence entre le théorème de Thévenin et le théorème de Norton :

Lors de l'étude d'un circuit linéaire, il est souvent pratique de passer d'une représentation de Thévenin à une représentation de Norton, et vice-versa. Ceci est possible car les deux représentations sont strictement équivalentes.

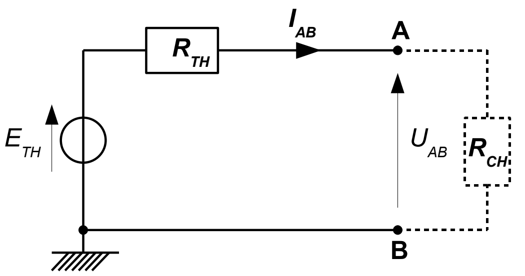
<table>
<tr>
<td>

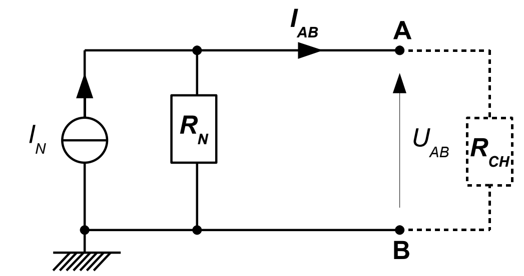
Figure 5.A : générateur équivalent de Thévenin.</td>
<td>

Figure 5.B : générateur équivalent de Norton.</td>
</tr>
<tr>
<td>$U_{AB}=E_{TH}-R_{TH} \cdot I_{AB}$ (1)</td>
<td>$I_{AB}=I_N-\frac{U_{AB}}{R_N}$
<=> $U_{AB}=R_N \cdot I_N-R_N \cdot I_{AB}$ (2)</td>
</tr>
</table>

Puisque les deux circuit sont équivalents, leurs caractéristiques $U_{AB}=f(I_{AB})$ doivent être identiques.
L'identification des expressions (1) et (2) nous donne par conséquent :

$$\begin{cases} E_{TH}=R_N \cdot I_N \\ R_{TH}=R_N \end{cases}$$