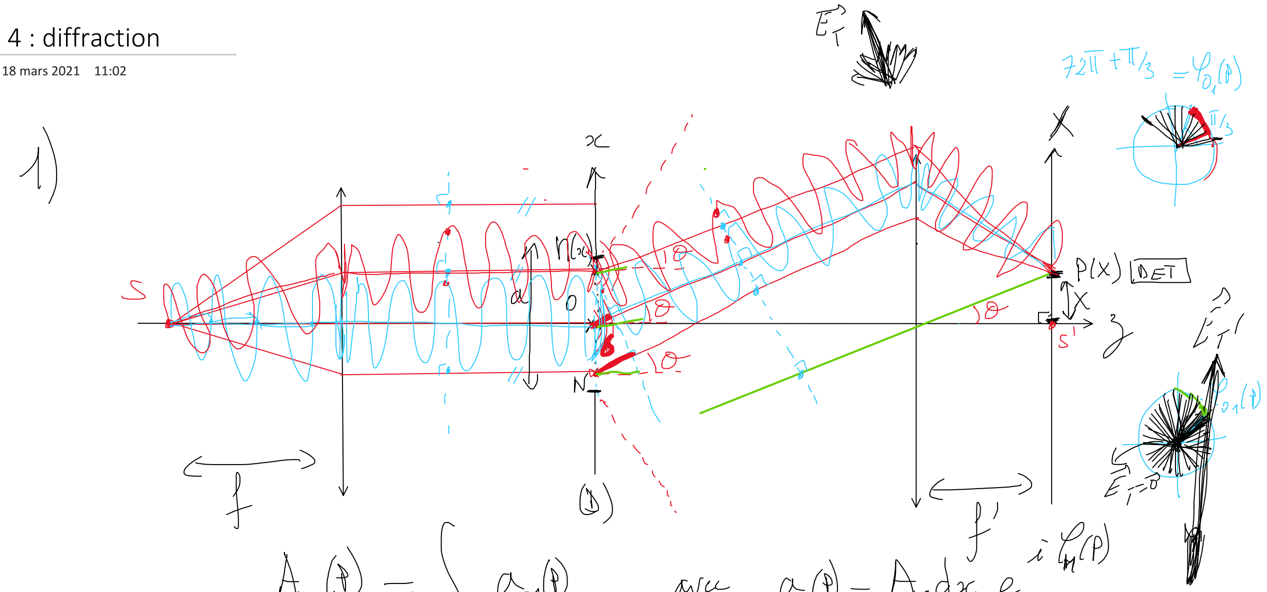
TD 4 : diffraction

jeudi 18 mars 2021 11:02

1)



$$\underline{A}_T(P) = \int_{(D)} \underline{a}_M(P). \quad \text{avec} \quad \underline{a}_n(P) = \underbrace{A_0 . dx}_{\text{"}a_0\text{"}} . e^{i\varphi_M(P)}$$

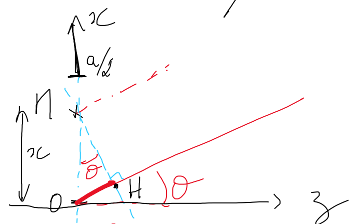
On choisit le rayon issu du point O comme rayon de référence :

$$\varphi_n(P) = \varphi_0(P) + \Delta\varphi(P) \quad \text{avec } \Delta\varphi(P) = \varphi_n(P) - \varphi_0(P)$$

On a alors : $\underline{A}_T(P) = A_0 . e^{i\varphi_0(P)} . \int_{-a/2}^{+a/2} e^{i\Delta\varphi(P)} . dx$

On déduit du schéma que $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} . \delta \simeq -\frac{2\pi}{\lambda} . \frac{xX}{f'}$

car :



$\delta = -x . \sin\theta = \ell_n - \ell_0$

$\delta \simeq -x\theta$ car $\theta \ll 1$ (Th. Scalaire : $X \ll f'$ et $\tan\theta = \frac{X}{f'} \simeq \theta$)

$$\boxed{\delta = -\frac{xX}{f'}}$$

On obtient ainsi : $\underline{A}_T(X) = A_0 e^{i\varphi_0(P)} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-\frac{2i\pi xX}{\lambda f'}} . dx$

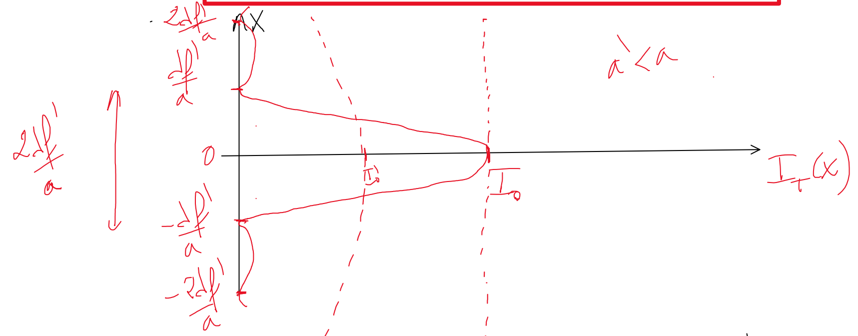
$$\underline{A}_T(X) = A_0 e^{i\varphi_0(P)} . \left[\frac{e^{-\frac{2i\pi xX}{\lambda f'}}}{-\frac{2i\pi X}{\lambda f'}} \right]_{-a/2}^{a/2}$$

$$= A_0 . e^{i\varphi_0(P)} . \frac{e^{-\frac{i\pi aX}{\lambda f'}} - e^{+\frac{i\pi aX}{\lambda f'}}}{(-2i) . \frac{\pi X}{\lambda f'}} \quad \text{"} \sin\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right)$$

$$A_T(X) = A_0 . a . e^{i\varphi_0(P)} . \frac{\sin\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right)}{\frac{\pi a X}{\lambda f'}} = \text{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right)$$

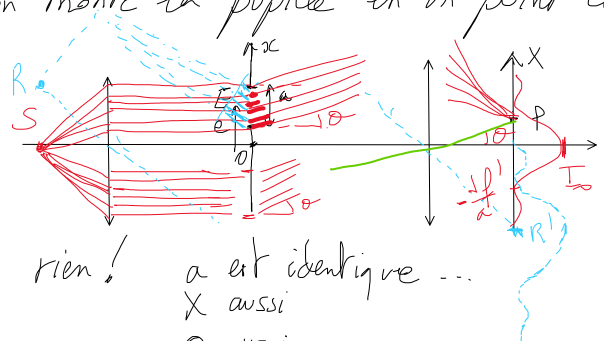
Au final : $I_T(X) = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |A_T|^2$

$$\boxed{I_T(X) = I_0 . \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right)} \quad \text{avec } I_0 = \frac{\varepsilon_0 c}{2} A_0^2 . a^2$$



Si a diminue, la tâche centrale (d'Airy), qui représente l'image de la source ponctuelle S par mon système optique, augmente… On étale encore plus la lumière sur l'écran.

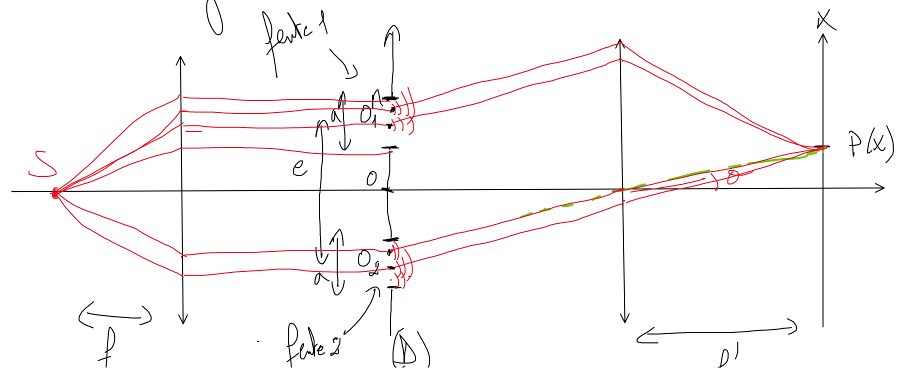
Que se passe-t-il si on monte la pupille en un point central E d'abscisse e ?



Cela ne change rien ! a est identique…
X aussi
θ aussi
f' aussi
I_0 aussi

↳ on collecte toujours la même quantité de lumière provenant de S et S n'a pas bougé donc son image est au même endroit.

2)



$$\underline{A}_T(P) = \int_{(D)} \underline{a}_n(P) \quad \text{avec} \quad \underline{a}_n(P) = A_0\, dx\, e^{i\varphi_n(P)}$$

On choisit un rayon de référence (ou un point de référence sur la pupille, ou encore l'origine de l'axe des x) : je choisis celui qui passe par O_2.

$$\varphi_n(P) = \varphi_{O_2}(P) + \Delta\varphi(P) \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi(P) = \varphi_n(P) - \varphi_{O_2}(P)$$

Ainsi :

$$\underline{A}_T(P) = A_0 e^{i\varphi_{O_2}(P)} \left[\underbrace{\int_{e-a/2}^{e+a/2} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}\frac{xX}{f'}} dx}_{\text{fente 1}} + \underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}\frac{xX}{f'}} dx}_{\text{fente 2}} \right]$$

$u = x - e$
$dx = du$
$x = u + e$

$$= A_0 e^{i\varphi_{O_2}(P)} \left[\int_{-a/2}^{a/2} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(u+e)\frac{X}{f'}} du + a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right) \right]$$

$$= A_0 e^{i\varphi_{O_2}(P)} \left[e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}\frac{eX}{f'}} \cdot \underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}\frac{uX}{f'}} du}_{a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right)} + a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right) \right]$$

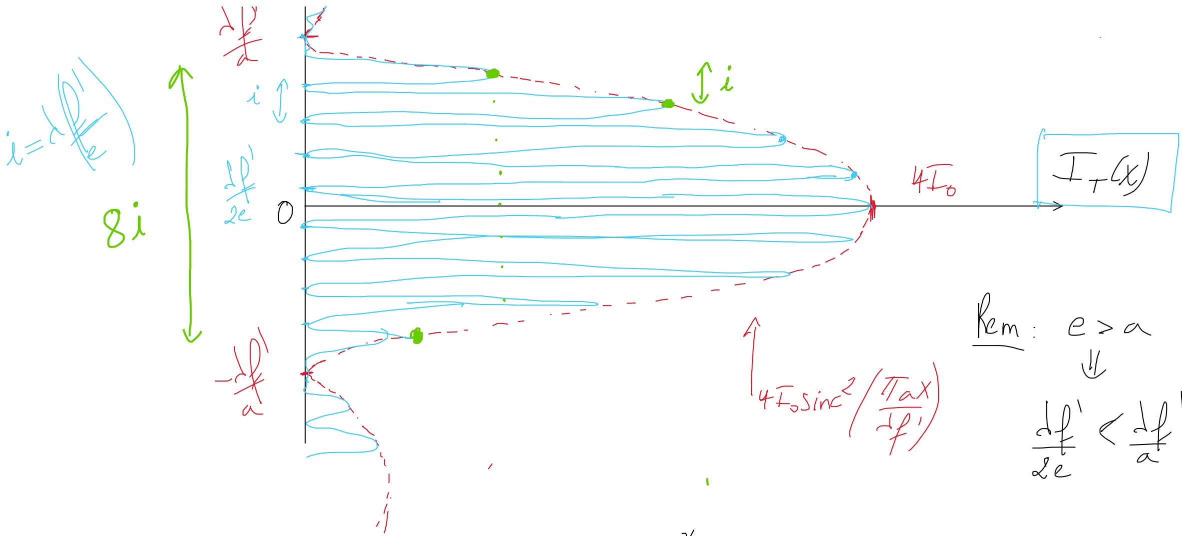
D'où

$$\underline{A}_T(X) = A_0 a\, e^{i\varphi_{O_2}(P)} \underbrace{\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right)}_{\text{diffraction}} \cdot \underbrace{\left[1 + e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}\frac{eX}{f'}} \right]}_{\text{interférence des fentes d'Young}}$$

et

$$I_T(X) = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left|\underline{A}_T(X)\right|^2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \underline{A}_T \cdot \underline{A}_T^*$$

$$\boxed{I_T(X) = 2 I_0 \underbrace{\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{eX}{f'}\right)\right]}_{\text{terme d'interférence par les fentes d'Young}} \cdot \underbrace{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right)}_{\text{"modulé" par la diffraction de chacune des fentes.}}}$$

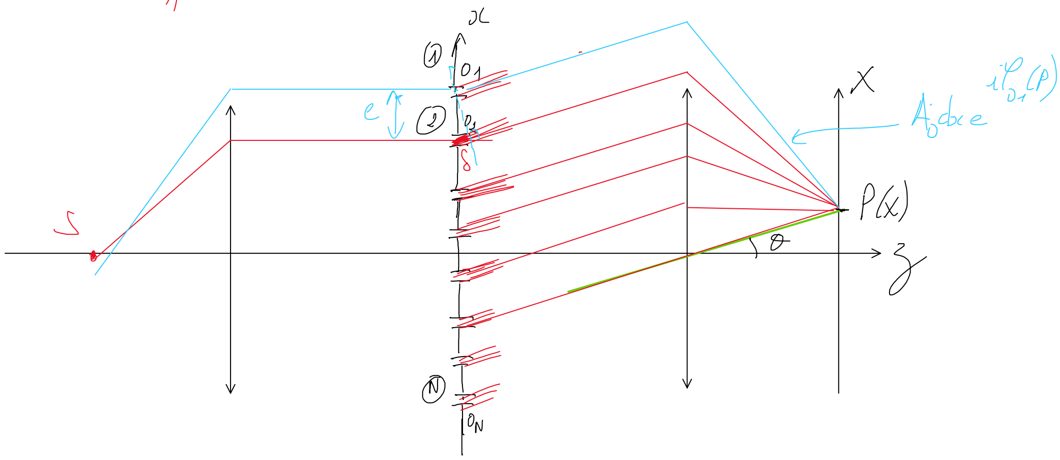


Rem : $e > a$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\lambda f'}{2e} < \frac{\lambda f'}{a}$$

3)



On choisit le point O_1 comme référence, et on obtient :

$$\underline{A}_T(P) = \int_{(D)} \underline{a}_n(P) = \int_{\text{fente }1} \underline{a}_n(P) + \int_{\text{fente }2} \underline{a}_n(P) + \dots + \int_{\text{fente }N} \underline{a}_n(P)$$

$$= A_0 e^{i\varphi_{O_1}(P)} \cdot \left[\int_{-a/2}^{a/2} \underbrace{e^{-\frac{2i\pi xX}{\lambda f'}}}_{F(x)} dx + \int_{-e-a/2}^{-e+a/2} F(x)dx + \dots + \int_{-(N-1)e-a/2}^{-(N-1)e+a/2} F(x).dx\right]$$

$$\begin{cases} v = x + e \\ x = v - e \\ dx = dv \end{cases}$$

Après avoir effectué $(N-1)$ changements de variable :

$$\underline{A}_T(P) = A_0 e^{i\varphi_{O_1}(P)} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} e^{-\frac{2i\pi uX}{\lambda f'}} du \cdot \left[1 + e^{\frac{2i\pi eX}{\lambda f'}} + \dots + e^{\frac{2i\pi (N-1)eX}{\lambda f'}}\right]$$

$$= A_0 e^{i\varphi_{O_1}(P)} \cdot a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right) \cdot \left[e^{\frac{i\pi(N-1)eX}{\lambda f'}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi N e X}{\lambda f'}\right)}{\sin\left(\frac{\pi e X}{\lambda f'}\right)}\right]$$

On en déduit $I_T(x) = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |A_T|^2$

soit $$\boxed{I_T(x) = I_0 \cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda f'}\right) \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi N e x}{\lambda f'}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi e x}{\lambda f'}\right)}}$$