NOM-Prénom : . . . . CORRECTION PO-Groupe : . . . . . .

CC2 Ondes et Propagation - durée 1h30

Mercredi 2 Juin 2021, MIC 2^{nde} année

Le barème est susceptible d'être modifié. Soulignez les résultats.

Exercice 1 : Superposition de 2 ondes (/ 5 pts)

Deux OPPMs de même pulsation, polarisées rectilignement selon (Oy), se propagent dans le vide suivant l'axe (Ox) mais dans des sens opposés. L'amplitude du second champ est une fraction r de celle du premier (notée E_0), et qui vérifie $0 < r < 1$.

1. Après avoir écrit les champs $\underline{\vec{E}}_1(M,t)$ et $\underline{\vec{E}}_2(M,t)$, exprimer le champ $\underline{\vec{E}}_T(M,t)$ de l'onde résultante au point $M(x,y,z)$ et à l'instant t, en notation complexe. En déduire en fonction des paramètres E_0, r, c et k, l'amplitude du champ $\vec{E}_T$.

$$\underline{\vec{E}}_1(M,t) = E_0\, e^{i(kx-\omega t)}\,\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}_2(M,t) = r E_0\, e^{-i(kx+\omega t)}\,\vec{e}_y$$

0,5/ 0,5/

(2,5)

$$\underline{\vec{E}}_T(M,t) = E_0 \cdot \left[e^{ikx} + r e^{-ikx}\right] \cdot e^{-i\omega t} \cdot \vec{e}_y$$

$$\underline{\vec{E}}_T(M,t) = E_0 \left[(1+r)\cos(kx) + i(1-r)\sin(kx)\right] \cdot e^{-i\omega t} \cdot \vec{e}_y \quad 0{,}5/$$

D'où : $\|\vec{E}_T(M,t)\| = |\underline{\vec{E}}_T(M,t)| = E_0 \sqrt{(1+r)^2\cos^2(kx) + (1-r)^2\sin^2(kx)}$

$$\boxed{E_T = E_0\sqrt{1+r^2+2r\cos(2kx)}} \quad 1/$$

2. Exprimer le taux d'onde stationnaire, défini comme $\text{TOS} = E_{\text{max}}/E_{\text{min}}$, pour l'onde résultante en fonction de r. Commenter les valeurs du TOS quand $r \to 0$ et quand $r \to 1$.

$E_{max} = (1+r)E_0$ et $E_{min} = (1-r)E_0$

(1,5)

Donc : $\boxed{\text{TOS} = \dfrac{1+r}{1-r}}$. 0,5/

Si $r \to 0$, $\text{TOS} \to 1$ (propagation "totale" d'une seule onde) 0,5/

Si $r \to 1$, $\text{TOS} \to +\infty$ (onde stationnaire totale) 0,5/

3. Déterminer les positions des plans d'onde pour lesquelles : a) l'amplitude de $\vec{E}$ est maximale, et b) l'amplitude de $\vec{E}$ est minimale.

$E_T = E_{max}$ quand $\cos(2kx) = +1 \iff 2 \times \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = 2p\pi \quad p \in \mathbb{Z}$

$$\iff \boxed{x_p = p \cdot \frac{\lambda}{2}} \quad 0{,}5/$$

(1)

$E_T = E_{min}$ quand $\cos(2kx) = -1 \iff 2 \times \frac{2\pi}{\lambda} x = (2q+1)\pi \quad q \in \mathbb{Z}$

$$\iff \boxed{x_q = (2q+1) \cdot \frac{\lambda}{4}} \quad 0{,}5/$$

Exercice 2 : Propagation dans un milieu interstellaire (/ 15 pts)

Nous allons étudier les caractéristiques d'une onde électromagnétique plane, sinusoïdale, polarisée rectilignement $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp[i(\underline{\vec{k}}.\vec{r} - \omega t)]$ qui se propage dans un plasma interstellaire composé d'ions (masse M) et d'électrons (masse m), de charge respective $+e$ et $-e$. Ce milieu est considéré comme un plasma froid avec des densités de porteurs de charge $n_e = n_i = n$. On néglige donc les interactions entre particules, ainsi que la polarisation du milieu au passage de l'onde. Dans ces conditions, les mouvements des particules (non relativistes) ne sont déterminés que par leur inertie et par l'action du champ électrique de l'onde é.m. se propageant dans le plasma, le poids des particules étant négligeable.

1. A partir d'une équation de Maxwell bien choisie et en utilisant la notation complexe, établir le lien qui existe entre les champs $\underline{\vec{B}}$ et $\underline{\vec{E}}$ de cette onde.

$$\vec{rot}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \iff i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = i\omega\underline{\vec{B}}$$

$$\iff \boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}}$$

0,5

2. Ecrire l'équation de dispersion généralisée pour ce milieu en fonction des données de l'énoncé. Quelle grandeur nous manque pour déterminer $\vec{k}$?

1

- $\mu = \mu_0$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$ donc $\boxed{k^2 = \left(1 + \frac{i\underline{\sigma}}{\varepsilon_0 \omega}\right)\cdot\frac{\omega^2}{c^2}}$ 0,5
- On doit déterminer $\underline{\sigma}$. 0,5

3. Quelle force caractérise l'interaction de l'onde avec les électrons du milieu traversé. Montrer comment son expression peut se simplifier grâce à une information de l'énoncé.

1

- $\vec{F}_{Lorentz} = -e\left(\vec{E} + \vec{v_e}\wedge\vec{B}\right)$ 0,5
- Electrons à vitesse non relativiste donc $\|\vec{v_e}\wedge\vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|$.
$\vec{F}_{Lor} \simeq -e.\vec{E}$. 0,5

4. A partir de l'équation du mouvement d'un ion (puis d'un électron) soumis à l'action de l'onde, montrer que la densité de courant ionique $\underline{\vec{j}_i}$ (puis électronique $\underline{\vec{j}_e}$) peut se mettre sous la forme $\underline{\vec{j}_i} = i\frac{\alpha_i}{\omega}\underline{\vec{E}}$ avec α_i une constante fonction des propriétés des ions (idem pour $\underline{\vec{j}_e}$ avec α_e).

1,5

0,5 méthode.

- Pour un ion : PFD

$M\vec{a_i} = +e\vec{E}$

RSF donc not. cplx : $-iM\omega\underline{\vec{v_i}} = e\underline{\vec{E}}$

et $\underline{\vec{v_i}} = i\frac{e}{M}.\frac{\underline{\vec{E}}}{\omega}$

Donc $\boxed{\underline{\vec{j_i}} = e.n.\underline{\vec{v_i}} = i\frac{e^2 n}{M.\omega}.\underline{\vec{E}}}$ 0,5

- Pour un électron : idem avec m et $-e$: $\underline{\vec{v_e}} = -i\frac{e}{m\omega}\underline{\vec{E}}$

et $\boxed{\underline{\vec{j_e}} = i\frac{e^2.n}{m.\omega}.\underline{\vec{E}}}$ 0,5

5. En déduire la conductivité σ du milieu. On pose $\Omega_p^2 = \dfrac{n_i e^2}{\epsilon_0 M}$, $\omega_p^2 = \dfrac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}$ et $\omega_c^2 = \omega_p^2 + \Omega_p^2$.

Montrer que l'équation de dispersion du plasma s'écrit : $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$.

- D'où $\vec{j}_{Total} = \vec{j_i} + \vec{j_e} = i\,\dfrac{e^2 n}{\omega}\left(\dfrac{1}{M} + \dfrac{1}{m}\right)\cdot \vec{E} = \underline{\sigma} \cdot \vec{E}$ 0,5

1

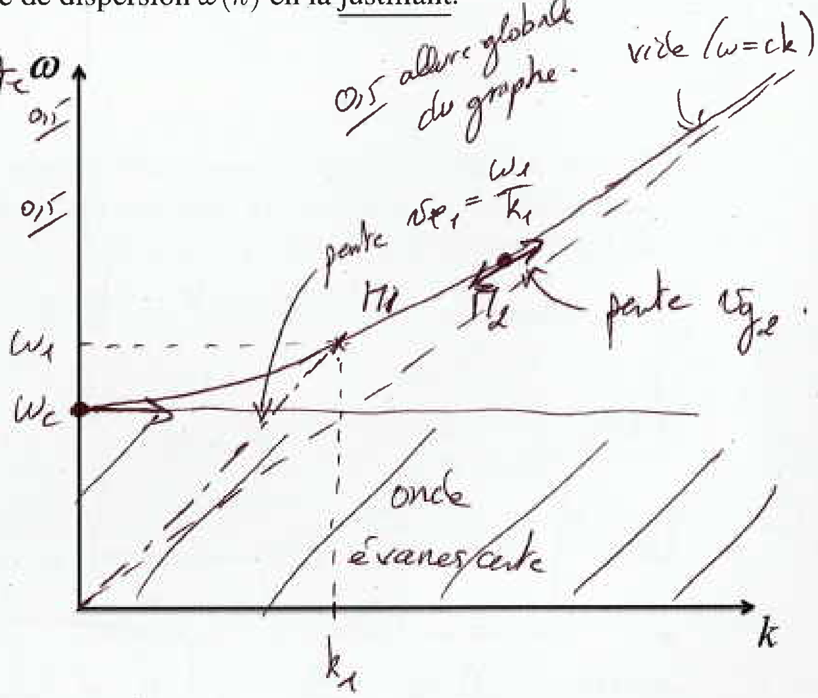
- $k^2 = \left[1 - \dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}\right]\cdot \dfrac{\omega^2}{c^2} = \dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$. 0,5

2,5

6. Déterminer le domaine de pulsation pour lequel l'onde est évanescente et celui pour lequel l'onde est progressive. Tracer la courbe de dispersion $\omega(k)$ en la justifiant.

- Si $\omega < \omega_c$: $k^2 < 0$: onde évanescente 0,5
- Si $\omega > \omega_c$: $k^2 > 0$: onde progressive non atténuée. 0,5
- Si $\omega \to \omega_c$, $k^2 = 0$ 0,5
- Si $\omega \to +\infty$, $k \simeq \dfrac{\omega}{c}$ 0,5
  ↳ asymptote $\omega = ck$

optionnel :
- Si $\omega \to \omega_c$, tangente horizontale ($v_\varphi \to +\infty \to v_g \to 0$)



7. Exprimer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g de l'onde progressive en fonction de c et des pulsations caractéristiques du plasma. Indiquer en un point de la courbe de dispersion ci-dessus comment les identifier graphiquement.

- $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}}$ 0,5 → correspond à la pente du segment reliant l'origine au point de fonctionnement du système (ex : M_1) 0,5

2

- $v_g = \dfrac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}$ → correspond à la pente de la tangente au point de fonctionnement du système. (ex. M_2) 0,5 0,5

1,5

8. Exprimer l'indice de réfraction n_{opt} du milieu et représenter sa variation $n_{opt}(\omega)$ (les pentes aux points remarquables de la courbe ne sont pas demandées).

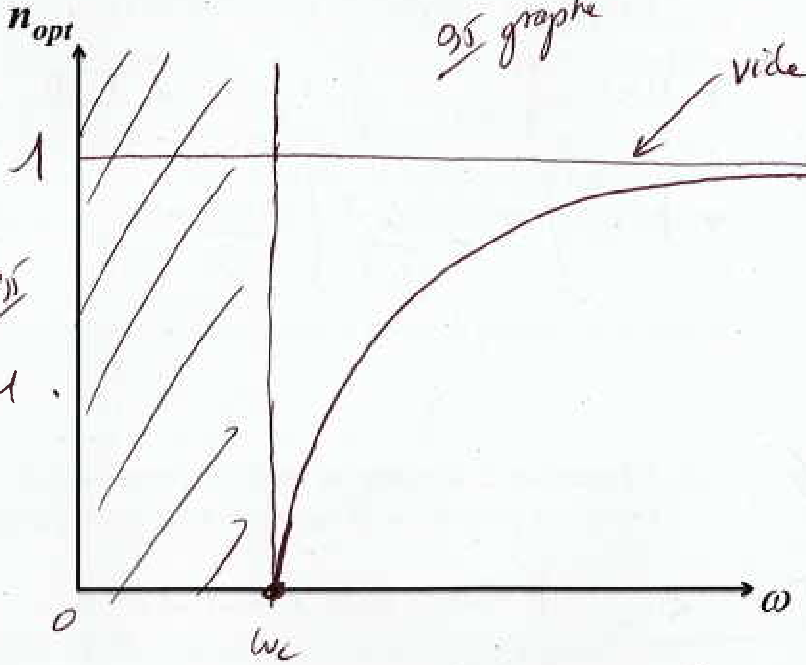
$n_{opt} = \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} < 1$

0,5

Si $\omega = \omega_c$, $n_{opt} = 0$

Si $\omega \to +\infty$, $n_{opt} \to 1$) 0,5

↳ asymptote horizontale $n = 1$.



9. Dans le domaine des ondes évanescentes, donner l'expression de la grandeur qui caractérise l'atténuation de l'amplitude de l'onde, que l'on notera δ. Etablir le lien entre la partie imaginaire de l'indice complexe n'' et δ.

Si $\omega < \omega_c$, $k^2 < 0$ et $\underline{k} = i\sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1} \cdot \frac{\omega}{c} = \frac{i}{\delta}$ 0,5

Ainsi, $\vec{\underline{E}}(n,t) = \vec{\underline{E}}_0 e^{-z/\delta} \cdot e^{-i\omega t}$

2,5

Donc $\boxed{\delta = \frac{c}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1}}}$ 1

Comme $\underline{n} = \frac{c\underline{k}}{\omega}$, $\boxed{n'' = \frac{ck''}{\omega} = \frac{1}{\delta}}$ 1

10. Dans le domaine des ondes progressives et pour une onde plane polarisée rectilignement selon l'axe (Ox), calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde en fonction de E_0, ω, v_φ et μ_0. Donner ensuite sa valeur moyenne temporelle.

1,5

$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})}{\mu_0 \omega} = \frac{(\vec{E} \cdot \vec{E})}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{k}}{\omega}$

Si $\vec{k} = k\vec{e}_z$, $\boxed{\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 v_\varphi} \cos^2(kz - \omega t)\,\vec{e}_z}$ avec $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$

1

$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 v_\varphi}\,\vec{e}_z}$ 0,5 (car $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$.)