NOM-Prénom : . . . . PO-Groupe : . . . . . .

Examen Final CC2 (2h30)
Cours Ondes et Propagation, MIC 2$^{\text{nde}}$ année

Mercredi 31 mai 2017 - 2h30
(Seuls le formulaire et la calculatrice sont autorisés)
Le barême est susceptible d'être modifié. Soulignez les résultats.

Comportement d'une OPPM en présence d'un milieu diélectrique (/ 10 pts)

Première partie : Propagation dans un diélectrique avec pertes (/ 6 points)

Soit un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope. Ce milieu est électriquement neutre ($\rho_{libre} = 0$), de conductivité nulle ($\sigma = 0$) et non magnétique ($\mu = \mu_0$). La polarisation diélectrique $\vec{P}$ présente un retard par rapport à l'excitation électrique $\vec{E}$, ce qui conduit à une permittivité complexe $\underline{\epsilon} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathrm{e}^{i\theta}$, où l'angle θ, appelé angle de pertes du diélectrique exprimé en radian, est très petit devant 1. Le champ électrique de l'OPPM pénétrant dans le diélectrique a pour forme générale :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \, \mathrm{e}^{i(\underline{k}z - \omega t)} \, \vec{e}_x$$

1. A partir de l'équation de dispersion généralisée, écrire celle du diélectrique en fonction de c, ω, ϵ_r et θ.

2. Ecrire alors $\underline{k}$ sous la forme $\underline{k} = |k|\mathrm{e}^{i\alpha}$, avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

3. En déduire $\underline{k}$ sous la forme $\underline{k} = k' + ik''$ avec k' et k'' réels et $k' > 0$. Donner une expression approchée de $\underline{k}$ en utilisant un développement limité du premier ordre en θ et en négligeant le reste. *On utilisera cette expression pour la suite.*

4. Donner, en fonction de c, ω, ϵ_r et θ, la représentation complexe du champ électrique présent dans le diélectrique, puis son expression réelle. Préciser la nature de l'onde.

5. Déterminer la vitesse de phase v_φ. Y a-t-il, et si oui lequel, un effet de la polarisation sur v_φ ?

6. Définir pour ce diélectrique ce que l'on peut appeler la profondeur de pénétration δ de l'onde et donner son expression. Application numérique : calculer δ pour $\omega = 10^8$ rad.s^{-1}, $\epsilon_r = 1,5$ et $\theta = 0,1$ rad. Commenter.

7. A partir de la relation $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$, déterminer l'expression du champ magnétique en notation réelle.

Seconde partie : Etude de la réflection/réfraction à l'interface entre deux diélectriques (/ 4 pts)

Ces questions sont indépendantes de la première partie.

On considère maintenant l'interface entre deux milieux diélectriques caractérisés par ϵ_{r1} et ϵ_{r2}, le premier étant sans pertes ($\theta_1 = 0$) et le second avec pertes (caractérisée par θ_2). Leurs autres propriétés sont identiques à celles du diélectrique étudié dans la première partie. L'OPPM en incidence normale se propageant du milieu 1 vers le milieu 2 est caractérisée par un champ électrique $\underline{\vec{E}}_i$ de formule :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 \, \mathrm{e}^{i(k_1 z - \omega t)} \, \vec{e}_x.$$

Elle engendre une onde réfléchie que l'on notera : $\underline{\vec{E}}_r = \underline{r} \, E_0 \, \mathrm{e}^{-i(k_1 z + \omega t)} \, \vec{e}_x$, ainsi qu'une onde transmise de la forme : $\underline{\vec{E}}_t = \underline{t} \, E_0 \, \mathrm{e}^{i(\underline{k}_2 z - \omega t)} \, \vec{e}_x$, avec $\underline{k}_2$, $\underline{r}$ et $\underline{t}$ complexes.

1. Donner les indices n_1 et $\underline{n}_2$ des milieux en fonction de k_1 et $\underline{k}_2$.

2. Calculer $\underline{\vec{B}}_i$, $\underline{\vec{B}}_r$, et $\underline{\vec{B}}_t$, en faisant bien apparaître n_1, $\underline{n}_2$, c, $\underline{r}$ et $\underline{t}$ dans leurs expressions.

3. A partir des relations de continuités à l'interface, sachant qu'il n'y a pas de courant surfacique, montrer que :

$$\underline{r} = \frac{n_1 - \underline{n}_2}{n_1 + \underline{n}_2} \qquad \text{et} \qquad \underline{t} = \frac{2 \, n_1}{n_1 + \underline{n}_2}.$$

Propagation guidée entre deux plans conducteurs (/ 10 pts)

Une onde électromagnétique monochromatique se propage dans le vide suivant (Oz) entre deux plaques métalliques parfaitement conductrices, occupant les plans $y = 0$ et $y = b$. Les composantes de l'onde, selon les axes du référentiel $Oxyz$ sont :

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(kz - \omega t) \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \qquad \text{et } \vec{B} \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \frac{kE_0}{\omega} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(kz - \omega t) \\ B_z = -\frac{\pi}{b}\frac{E_0}{\omega} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(kz - \omega t) \end{cases}$$

1. Comment s'expriment les deux conditions de continuité à l'interface vide/métal parfait que doivent vérifier les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ de l'onde pour qu'il y ait propagation.

2. Ces conditions sont-elles vérifiées ici ? Justifier.

3. En justifiant votre réponse, indiquez le mode de propagation de cette onde. Indiquez aussi quel est le plan d'incidence de l'onde.

NOM-Prénom : . . . .   PO-Groupe : . . . . . .

4. Cette onde se déplaçant dans le vide situé entre les deux plaques, retrouver l'équation de propagation du champ électrique dans ce milieu à partir des équations de Maxwell.

5. A partir de cette équation et en gardant la forme réelle de $\vec{E}(M,t)$, établir l'équation de dispersion $k^2(\omega)$ de l'onde et montrer que k peut se mettre sous la forme :

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - A^2}, \text{ où } A \text{ s'exprime en fonction de } b, c, \omega \text{ et d'une constante.}$$

6. En déduire l'expression de la fréquence de coupure f_c et indiquer pour quelle gamme de fréquences il y a propagation de l'onde.

7. Donner la condition sur λ pour qu'il n'y ait pas de propagation possible du mode supérieur.

8. Lorsqu'il y a propagation, donner les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g de l'onde en fonction de b, c et ω.

9. Représenter, en la justifiant, l'allure de la courbe de dispersion $\omega = f(k)$ de ce guide d'onde.